C. Meunier, 1995

Démythifier le nombre d'or

SOMMAIRE :

Une lecture simple et rapide, non mathématique, est possible en ne lisant que les bilans en page 17 et 43, voire les conclusions intermédiaires, en caractères gras, pages 2-3-5-6-7-9-11-14-16-17 et 19-20-25-27-29-34-36-42.

(I) PRÉSENTATION FABULEUSE

1. la divine proportion

Les architectes ou les artistes, pour dessiner des proportions harmonieuses, peuvent s'en remettre au jugé intuitif ou bien à la géométrie. La première approche valorise la création subjective, la richesse des délires personnels, tandis que la seconde s'appuie sur une conception universelle du beau, assimilée à la perfection.

L'idée que des proportions mathématiquement parfaites existaient *avant* l'invention des mathématiques conduit les auteurs mystiques à conclure qu'il s'agit de proportions d'essence divine.

• Le plus élémentaire problème de proportions

Pour définir une proportion, le cas le plus simple, le plus dépouillé, consiste à scinder un segment en deux. La proportion peut être :
- soit la taille d'un morceau par rapport au segment de départ (*proportion relative*)
- soit la taille d'un morceau par rapport à l'autre (*proportion comparative*).

Question : comment choisir le plus simplement possible la position du point de coupure ?

Avant d'avancer des chiffres ronds ou des concepts abstraits ("milieu"...), une approche absolument pure est possible. Il suffit de chercher le point qui donne une égalité parfaite entre proportions comparative et relative.

• Mise en équations

Pour fixer les idées, prenons un *segment* AB au sein duquel on va définir un point de coupure X (cf figure I.1.A ci-dessous).

Figure I.1.A

La proportion relative est K = AB/AX ; la proportion comparative est K' = AX/BX.
Sachant que AX + BX = AB, on peut écrire, quel que soit le point X :

$$K' = \frac{AX}{BX} = \frac{AX}{AB - AX} = \frac{1}{\dfrac{AB - AX}{AX}} = \frac{1}{K - 1}$$

L'équation à résoudre, pour le point visé (tel que K = K'), est donc K = 1/(K-1), autrement dit : $K^2 - K - 1 = 0$, équation qui a pour seule solution positive le nombre : $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, que l'on note φ.

• Conclusion

Mystérieusement, la proportion la plus simple, la plus pure (et selon certains : la plus harmonieuse) n'est pas du tout un nombre simple, rationnel (comme 2/1 ou 3/2).

En ce sens, le compliqué nombre φ, qui sort de l'équation de proportion élémentaire, est aussi fascinant que le ratio entre circonférence et diamètre d'un cercle (le célèbre π).

2. le nombre d'or

Si le nombre φ n'avait pour propriété remarquable que de répondre à un problème géométrique de proportion, son pouvoir de fascination serait limité, mais l'étude de ce nombre par lui-même révèle des propriété étonnantes.

• Le miracle des valeurs numériques

A l'époque moderne, où les calculatrices de poche sont une banalité, il est extrêmement facile de trouver une estimation chiffrée de φ.

Le calcul, effectué par curiosité, donne un nombre voisin de 1,6. Ceci ressemble à la moitié du nombre π (3,14/2 = 1,57). Mais, en fait, φ est un peu plus grand (φ = 1,62 et 2.φ = 3,24).

Le nombre φ étant, lui-même, un peu inférieur à 2, on est tenté de voir si φ au carré n'est pas plus proche de π que ne l'était 2.φ.

Et là, il se produit un phénomène tout à fait étrange :

a) l'affichage de φ indiquait 1.618033989

b) quand on appuie sur la touche "élévation au carré" (x^2), seul le premier digit change, et l'affichage devient 2,618033989.

c) surpris, on revient au nombre φ initial, et l'on essaye une autre touche : la touche "inverse" (1/x), et là encore, seul le premier digit change : l'affichage devient 0,618033989.

C'est là un phénomène incroyable : c'est comme si, par exemple, le carré de 12 donnait 22 (au lieu de 144) et l'inverse de 12 : 2 (au lieu de 0,083).

Pour voir si la coïncidence est complète, on peut faire apparaître quelques chiffres significatifs supplémentaires (par exemple en retranchant les 4 premiers chiffres et en multipliant par 100.000). Et ceci confirme l'anomalie : dans les 3 cas, le 9 du dernier chiffre significatif est un arrondi de 8,75..

• Preuve algébrique

L'égalité des 9 premiers chiffres décimaux ne *démontre* bien sûr pas la loi : $\varphi = \varphi^2 - 1 = \frac{1}{\varphi} + 1$

Mais on peut vérifier mathématiquement cette loi, en repartant de la formule développée :

$$\varphi^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \varphi$$

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot (1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{1-\sqrt{5}}{-2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1-2}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1 = \varphi - 1$$

L'égalité est donc parfaite.

D'autres propriétés exceptionnelles, révélées par la calculatrice, sont pareillement confirmables :

$$\varphi^3 = \varphi + \varphi^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varphi^2} = 1 - \frac{1}{\varphi} = 2 - \varphi$$

• Conclusion

Le terme φ, en tant que nombre, est une bête curieuse. Par ces propriétés algébriques, c'est même le plus marquant des nombres. Les chiffres 0 et 1 ont évidemment aussi des propriétés uniques, mais celles-ci leur sont conférées par leur définition quand on fonde l'arithmétique. Ce n'est pas comme les propriétés de φ, qui semblent tomber du ciel.

Présentant des propriétés remarquables à la fois en géométrie et en algèbre, φ mérite bien le label de "nombre d'or".

3. la section d'or

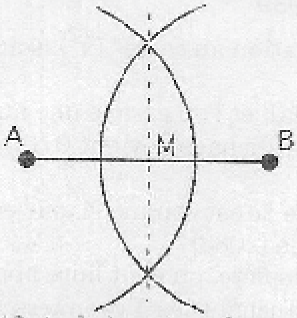
Les propriétés algébriques du nombre φ sont certes impressionnantes, mais l'aspect géométrique, à la réflexion, est moins pur. En effet, le problème de section d'un segment avait été résolu par l'algèbre, dans la première partie (via une équation du second degré). On peut se demander si de purs géomètres, n'ayant pas inventé l'arithmétique, auraient pu découvrir la divine proportion.

• Un élément préalable : le milieu

Le problème géométrique de proportion dans un segment, peut être résolu très simplement si le segment est une ficelle : il suffit de replier et de retendre, le point de pliure est le milieu du segment.

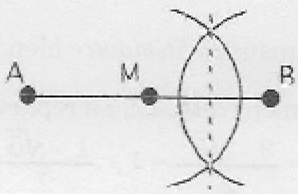
Si le segment est solide, impliable, on peut tout de même recourir à une ficelle. En effet : la ficelle tendue d'une main à l'autre peut faire office de règle ; en maintenant une extrémité fixe, cette règle de longueur choisie fait également office de compas. On peut alors procéder comme en figure I.3.A pour déterminer le milieu : tracer 2 cercles de même rayon, l'un centré en A et l'autre en B, la droite joignant leurs points d'intersection coupe le segment AB en son milieu.

Figure I.3.A



Dans un second temps, on peut définir de la même façon un milieu intermédiaire (cf figure I.3.B), et ainsi de suite au fur et à mesure que l'on définit des sous-segments. En termes d'algèbre, ceci revient à découvrir géométriquement les rapports K = 2/1 puis 4/1 puis 8/1 puis 16/1 etc. (et leurs composés 4/3 ; 8/3, 8/5, 8/7 ; 16/3, 16/5, 16/7, 16/9, 16/11, 16/13, 16/15 ; etc.).

Figure I.3.B



• Nécessité d'une autre technique

Le découpage par itération présente deux défauts principaux :

— *Complexité excessive* : si l'on veut une proportion différente de 2/1, 4/1 et 4/3, le nombre de cercles à tracer devient très élevé (avec le risque de cumuler les imprécisions, les erreurs), et le rayon des cercles devient très faible (avec le risque de grandes imprécisions relatives).

— *Complexité insuffisante* : le moyen est astucieux, mais sans prestige — il ne fait qu'étendre aux objets solides ce que chacun peut réaliser intuitivement par pliages successifs d'une ficelle. Un géomètre, pour justifier sa discipline, se doit de trouver une recette plus originale, permettant de scinder à un endroit précis un segment donné.

Le facteur-clé, pour générer de nouvelles mesures, indépendantes, consiste à exploiter une seconde dimension : au lieu de centrer tous les cercles sur des points du segment, on va les centrer sur des points situés au dessus de ce segment. La figure I.3.A présente un tel point, mais sa position n'est pas reproductible, puisque le rayon des cercles mis en œuvre est quelconque.

La voie la plus prometteuse semble donc :

1) retenir le principe d'un segment orthogonal à AB

2) définir des points d'intersection entre ce segment vertical et des cercles bien déterminés.

3) partir de ces points de dessus pour générer des cercles coupant AB en définissant un nouveau point

• Exploitation des orthogonales

La démarche théorique entrevue peut prendre, très simplement, la forme présentée sur la figure I.3.C. En plus de la classique détermination de milieu M, on obtient un point C aligné, et une orthogonale en B.

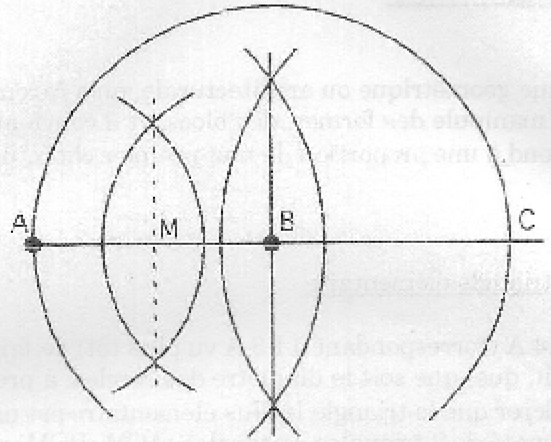


Figure I.3.C

A partir de là, des cercles de rayon bien choisi permettent d'obtenir successivement un point M' à partir de M, puis un point B' à partir de B, et enfin un point de section B" à partir de B' (cf figure I.3.D).

Cette section en B" a donc été obtenue en traçant au total 8 cercles, ce qui est plus simple que toutes les techniques visant à définir les rapports 32/1 ou 64/1 etc. (et composés).

De plus, les rayons étaient tous supérieur ou égal à AM, ce qui est plus précis que les techniques aboutissant aux rapports 4/1, 8/1, etc. En ce sens, B" est le second point déterminable de manière reproductible, après le milieu

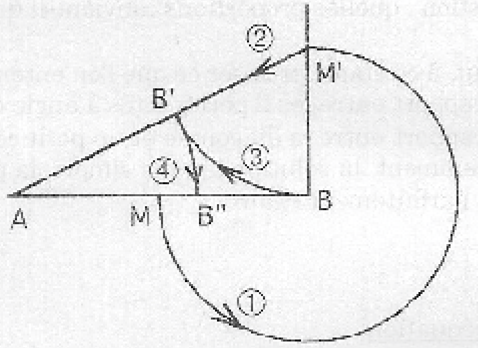


Figure I.3.D

• A-t-on redécouvert la proportion divine ?

Un pur géomètre s'arrêterait évidemment à la détermination graphique de B", mais a posteriori, il est possible de mesurer la proportion qui en découle. Évidemment, vu le sujet de cet opuscule, on va retrouver $K = \varphi$. Mais encore faut-il le montrer.

On a, par construction : AB"= AB' ; AB'= AM' - B'M' ; B'M'= M'B = BM = AB/2, d'où :

$$K = \frac{AB}{AB''} = \frac{AB}{AM' - \frac{AB}{2}} = \frac{AB}{\sqrt{AB^2 + M'B^2} - \frac{AB}{2}} = \frac{AB}{\sqrt{AB^2 + \frac{AB^2}{4}} - \frac{AB}{2}} = \frac{AB}{\frac{AB}{2}\sqrt{5} - \frac{AB}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1}{1/\varphi}$$

• Conclusion

Avec un simple bout de ficelle, on peut effectivement trouver la proportion φ. L'opération vient immédiatement après la détermination du milieu, dans la séquence des découpages précis imaginables.

Le nombre d'or est donc bien d'une simplicité remarquable, ce n'est pas le résidu étrange d'équations sophistiquées et de critères purement abstraits.

4. le triangle d'or

Dans la pratique géométrique ou architecturale, on a rarement affaire à un simple segment isolé. Le plus souvent, on manipule des formes, des blocs, et il convient de voir si, à ce niveau-là également, le nombre φ correspond à une proportion de tout premier choix, une solution particulièrement simple et harmonieuse.

• A la recherche du triangle élémentaire

Sur la figure I.4.A (correspondant à I.3.A vu plus tôt), le fait de définir un point au dessus du segment de base conduit, quel que soit le diamètre des cercles, à prendre ce point à l'aplomb du milieu. Ceci revient à considérer que le triangle le plus élémentaire est un triangle isocèle (ABC). Mais un triangle isocèle étant composé de 2 triangles rectangles (ACM, BCM) adossés en miroir, on peut dire que le triangle de base est un triangle rectangle.

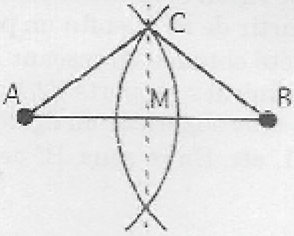


Figure I.4.A

Question : quelles proportions convient-il de choisir pour avoir un triangle simple, harmonieux ?

Il faut, à ce stade, préciser ce que l'on entend par proportion, pour un triangle rectangle :
— soit le rapport entre les 2 petits côtés à angle droit (*proportion orthogonale*)
— soit le rapport entre la diagonale et un petit côté (*proportion oblique*)

Evidemment, la solution la plus simple, la plus pure, consiste à choisir un triangle où ces 2 rapports sont parfaitement égaux.

• Mise en équation

A cause de Pythagore, il est préférable de raisonner sur les carrés : de toute façon, si 2 rapports sont égaux, leurs carrés seront égaux.

La proportion oblique est $K = (BC/CM)^2$ et la proportion orthogonale $K' = (CM/BM)^2$.
Quelle que soit les proportions, on peut écrire :

$$K' = \frac{CM^2}{BM^2} = \frac{CM^2}{BC^2 - CM^2} = \frac{1}{\dfrac{BC^2 - CM^2}{CM^2}} = \frac{1}{K-1}$$

Dans le cas visé (avec K = K'), on aboutit donc à l'équation de la divine proportion : $K = 1/(K-1)$, et cela donne évidemment : $K = \varphi$.

Et si l'on contestait la "simplicité" de l'élévation au carré, on pourrait montrer que dans ce triangle (où $K = K' = \varphi$), un ratio non-carré est aussi égal à φ. Voici la démonstration de cette singularité :

$$\frac{BC}{CM} = \frac{CM}{BM} \Rightarrow BC = \frac{CM^2}{BM} \Rightarrow \frac{BC}{BM} = \frac{CM^2}{BM^2} = K' \Rightarrow \frac{BC}{BM} = \varphi$$

• Conclusion

Après l'aride domaine des tronquage de segments, l'univers bien visuel des formes de triangle conduit pareillement à une proportion optimale fondée sur le nombre φ.

On peut remarquer que le triangle ainsi défini, dit "triangle d'or" ou "triangle de Cheops", est illustré par les célèbres et millénaires pyramides d'Egypte.

5. le rectangle d'or

Après les segments définis par 3 points, et les triangles définis par 4 points, on est naturellement conduit à se pencher sur les quadrilatères, définis par 4 points. Là encore, il peut être intéressant de trouver un guide, en matière de proportions.

• A la recherche de la nouveauté

Si l'on part du triangle d'or, il est évident que l'on peut définir directement des quadrilatères associés, tous présentant des propriétés marquantes du fait de cette origine (cf figure I.5.A) :
— losange (ACBC'), le triangle d'or définissant le côté et les demi-diagonales
— quadrilatère (ABA'C), le triangle d'or définissant la hauteur et la petite diagonale
— rectangle (CMBB'), le triangle d'or définissant les côtés et la diagonale

Mais rien n'empêche d'aborder les rectangles par un tout autre angle. Qu'est-ce, fondamentalement, qu'un rectangle : c'est un carré dont on a étiré un côté (cf figure I.5.B). Vu ainsi, tout rectangle (ABCD) se décompose en un carré de base (AA'D'D) et un petit rectangle accolé (A'BCD').

Figure I.5.A

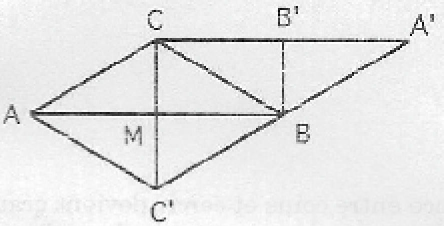
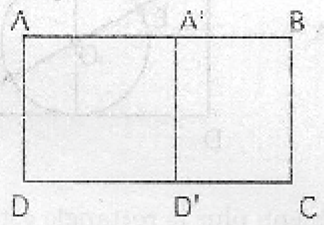


Figure I.5.B



Question : comment choisir le plus simplement possible la forme du rectangle ?

Comme souvent, la proportion peut renvoyer à 2 idées :
— le rapport grand côté / petit côté du rectangle final (*proportion majeure*)
— le rapport grand côté / petit côté du rectangle accolé au carré (*proportion mineure*)

Pour faire simple et pur, on est conduit, encore une fois, à retenir le cas où ces proportions sont juste égales, sans choisir par avance de valeur chiffrée.

• Mise en équations

La proportion majeure est K = AB/AD ; la proportion mineure : K' = AD/A'B

Or, dans tous les cas, on peut écrire :

$$K' = \frac{AD}{AB - AA'} = \frac{AD}{AB - AD} = \frac{1}{\frac{AB - AD}{AD}} = \frac{1}{\frac{AB}{AD} - 1} = \frac{1}{K - 1}$$

Dans le cas où K = K', on en revient donc à l'équation K = 1/(K-1), et donc on obtient K = φ.

Ce rectangle, dit "rectangle d'or", est distinct du rectangle extrapolable du triangle d'or, pour lequel c'est le carré de la proportion majeure qui vaut φ.

• Conclusion

Même en choisissant délibérément de s'écarter du triangle d'or pour définir un rectangle optimal, on aboutit à retrouver la proportion φ comme fondement du plus simple rectangle imaginable : le rectangle d'or.

Ceci confirme que le nombre d'or est absolument incontournable en géométrie.

6. l'inscription d'or

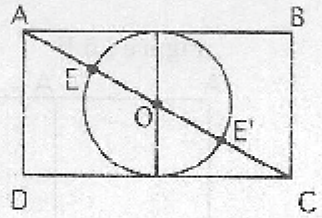
L'étude qui a conduit au rectangle d'or peut être critiquée sur 2 points :
— On aurait tout autant pu considérer que le plus simple moyen d'obtenir un rectangle à partir d'un carré consiste à accoler un carré identique au carré de départ ; c'est de cette façon que procèdent les écoliers, en traçant spontanément comme rectangle élémentaire une figure de 2 carreaux de large sur 1 carreau de haut. Autrement dit la proportion 2/1 est plus simple que la valeur φ du rectangle d'or, ou racine de φ pour le rectangle issu du triangle d'or.
— Un rectangle peut se définir autrement que par le lien avec un *carré* excentré : on peut exprimer ses proportions par la distance de ses coins au plus grand *cercle* traçable à l'intérieur, en plein milieu (on appelle ce cercle : "cercle inscrit").

Le premier argument est imparable, mais le second, complexe, mérite discussion.

• Définir un rectangle par un cercle

La figure I.6 A présente le tracé du cercle inscrit dans un rectangle.

Figure I.6.A



Effectivement, plus le rectangle est allongé, plus la distance entre coins et cercle devient grande. Mais chaque point du cercle est à une distance particulière d'un coin donné, et ceci complique l'analyse. Par ailleurs, pour être indépendantes de l'échelle et définir des proportions, ces distances doivent être rapportées à un même élément de référence : le diamètre du cercle.

Ceci conduit à définir 2 indicateurs de proportion :
— le rapport : distance minimale entre un coin et un point du cercle / diamètre du cercle (*proportion de voisinage*)
— le rapport : distance maximale entre un coin et un point du cercle / diamètre du cercle (*proportion d'éloignement*)

Question : Comment choisir ces rapports le plus simplement possible ?

L'idéal serait de les supposer égaux, mais le second est par principe supérieur au premier.
On n'est cependant pas contraint pour autant de fixer des valeurs arbitraires, il suffit de remplacer le premier par son inverse : diamètre / distance minimale (*proportion d'encombrement*) ; égaliser les rapports est alors facile.

• Mise en équations

La proportion d'encombrement est $k = AD/AE$ et la proportion d'éloignement : $k' = EC/AD$.
Dans tous les cas, on peut écrire :

$$k = \frac{AD}{AE} = \frac{AD}{AO - OE} = \frac{AD}{\frac{AC}{2} - \frac{AD}{2}} = \frac{2}{\frac{AC}{AD} - 1} = \frac{2}{k'' - 1} \text{ avec } k'' = \frac{AC}{AD}$$

$$k' = \frac{EC}{AD} = \frac{AC - AE}{AD} = \frac{AC - \left(\frac{AC}{2} - \frac{AD}{2}\right)}{AD} = \frac{\frac{AC}{2} + \frac{AD}{2}}{AD} = \frac{\frac{AC}{AD} + 1}{2} = \frac{k'' + 1}{2}$$

Dans le cas où $k = k'$, on aboutit à :

$$\frac{2}{k'' - 1} = \frac{k'' + 1}{2} \Rightarrow 4 = k''^2 - 1 \Rightarrow k'' = \sqrt{5} \Rightarrow k = k' = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \varphi$$

Loin d'aboutir à renier le nombre φ, la nouvelle approche y ramène tout autant que l'étude des proportions intuitives.

• A-t-on redécouvert le rectangle d'or ?

Le fait d'avoir trouvé φ au niveau des proportions rectangle/cercle n'implique pas, a priori, que ce soit également la valeur des proportions rectangle/carré, au sens défini dans le chapitre précédent. A ce stade, on ignore donc si l'on a redécouvert le rectangle proposé en première approche, ou bien si l'on a inventé un nouveau rectangle simple.

Pour départager les 2 hypothèses, il convient de revenir à l'indicateur intuitif de proportion pour un rectangle : la proportion majeure entre grand côté et petit côté, telle que définie dans le précédent chapitre.

Pour tout rectangle, on peut écrire :

$$K = \frac{AB}{AD} = \sqrt{\frac{AB^2}{AD^2}} = \sqrt{\frac{AC^2 - AD^2}{AD^2}} = \sqrt{\left(\frac{AC}{AD}\right)^2 - 1} = \sqrt{k''^2 - 1}$$

Sachant que dans le nouveau rectangle $k'' = \sqrt{5}$, on en déduit : $K = \sqrt{5 - 1} = 2 \quad (\neq \varphi)$

On a donc bien défini un nouveau rectangle, mais le miracle est que l'on répond au passage à la première des objections adressées au rectangle d'or : le double-carré ($K = 2$) n'est pas oublié, il est lui-même relié au nombre d'or, par le biais du cercle inscrit.

En un sens, ceci était prévisible : la diagonale d'un rectangle de 1 cm sur 2 cm vaut, en effet $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ cm ; et de là au nombre d'or, il n'y avait qu'un pas.

• Conclusion

Si l'on rejette le rectangle d'or en considérant que le rectangle le plus parfait est un double carré, tout simplement, il n'empêche que la perfection de celui-ci est liée à un rapport étroit et original avec le nombre d'or.

7. le périmètre d'or

Jusqu'à présent, la démarche d'optimisation des proportions a toujours consisté à rechercher l'égalité de 2 rapports, et l'on pourrait soupçonner que ce choix systématique explique à lui seul le fait d'aboutir systématiquement à une même équation, et donc à une même solution : le nombre d'or.

Il convient donc d'aborder les problèmes d'une autre façon, par exemple : la recherche d'extremum au moyen de l'analyse fonctionnelle.

• Pour un nouveau triangle

De nombreux triangles optimaux ont déjà été obtenus : le triangle d'or (et son double, isocèle), le triangle défini par la diagonale du rectangle d'or, le triangle défini par la diagonale du double-carré (cf inscription d'or). Cependant, les critères d'optimisation qui ont conduit à leur définition ne correspondent pas à une classe de paramètres essentiels caractérisant les triangles : la surface S, les hauteurs h et le demi-périmètre p.

Ces grandeurs sont liées. Si les sommets A,B,C sont opposés aux côtés a,b,c et générateurs des hauteurs hA,hB,hC, on a :

$$S = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)} \;;\; hA = \frac{2.S}{a} \;;\; hB = \frac{2.S}{b} \;;\; hC = \frac{2.S}{c}$$

La grandeur élémentaire est donc le demi-périmètre, et il serait logique d'optimiser la forme du triangle selon cette grandeur, ou une forme relative indépendante de l'échelle : par exemple p/c.

Prenons donc un segment c = AB servant de référence. On veut placer le point C au dessus. Il est évident que si C est situé quasiment sur le segment AB, p/c tend vers 1 (cf figure I.7.A) ; inversement, si C est infiniment loin, p/c tend vers l'infini (cf figure I.7.B). Dans les 2 cas, le triangle est tellement allongé qu'il n'a plus la forme d'un triangle.

Figure I.7.A

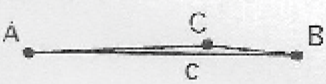
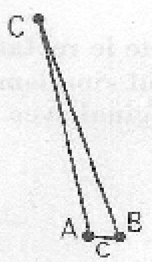


Figure I.7.B



Pour avoir un triangle harmonieux, il faut donc s'imposer une certaine distance au segment de départ. Une solution élégante consiste à placer le point C sur une parallèle au segment AB. Puisqu'il faut décider de la distance de cette parallèle, le plus simple consiste à prendre hC = c (c'est-à-dire la tangente horizontale au cercle de centre A et de rayon c — cf figure I.7.C).

Reste à déterminer sur l'axe ainsi défini, l'abscisse x du point C, telle que que le demi-paramètre soit minimal.

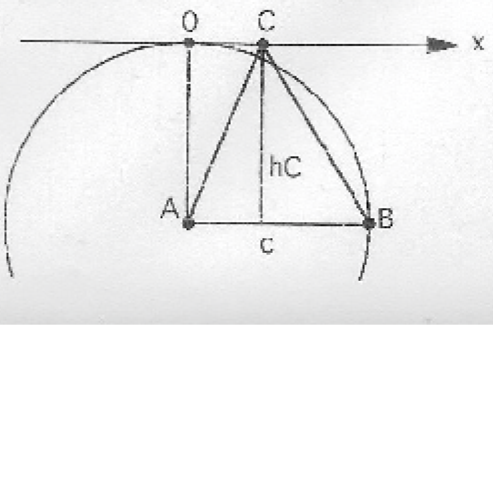


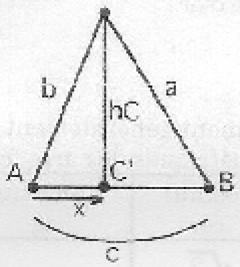
Figure I.7.C

• Mise en équations

Sur l'exemple de la figure I.7.D ($0 < x < c$), Pythagore donne les relations suivantes :

$$b = \sqrt{AC'^2 + CC'^2} = \sqrt{x^2 + hC^2} \quad ; \quad a = \sqrt{BC'^2 + CC'^2} = \sqrt{(c - x)^2 + hC^2}$$

Figure I.7.D



Si on avait $x > c$, le terme $(x - c)$ remplacerait $(c - x)$, mais puisqu'on élève au carré, la formule de a serait inchangée.

Si on avait $x < 0$, le terme x serait à remplacer par (-x), mais au carré cela revient au même. La différence $(x - c)$ serait, elle, à remplacer par la somme : $c + (-x)$, ce qui redonne bien $(x - c)$.

Les formules initiales sont donc bien généralisables à tous les cas.

On a par construction $hC = c$. Par ailleurs, on peut poser, avec k inconnu : $x = k.c$. On en déduit :

$$\frac{p}{c} = \frac{a + b + c}{2.c} = \frac{\sqrt{(c - k.c)^2 + c^2} + \sqrt{(k.c)^2 + c^2} + c}{2.c} = \frac{\sqrt{(1 - k)^2 + 1} + \sqrt{k^2 + 1} + 1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{c} = \frac{\sqrt{k^2 - 2.k + 2} + \sqrt{k^2 + 1} + 1}{2}$$

• Optimisation

Pour $k = \pm\infty$, ce facteur p/c est infiniment grand. Il décroît quand k passe de $-\infty$ à une valeur k', puis réaugmente de k' à $+\infty$. Le terme k' correspond donc à la valeur de k tel que la dérivée de p/c s'annulle.

$$\text{Donc : } \frac{d\frac{p}{c}}{dk}(k') = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}.\left(\frac{2.k' - 2}{2.\sqrt{k'^2 - 2.k' + 2}} + \frac{2.k'}{2.\sqrt{k'^2 + 1}} + 0\right) = 0$$

$$\Rightarrow (k' - 1).\sqrt{k'^2 + 1} + k'.\sqrt{k'^2 - 2.k' + 2} = 0 \Rightarrow (k'^2 + 1 - 2.k').(k'^2 + 1) = (-k')^2.(k'^2 - 2.k' + 2)$$

$$\Rightarrow k'^2 + 1 - 2.k' + k'^4 + k'^2 - 2.k'^3 = k'^4 - 2.k'^3 + 2.k'^2 \Rightarrow 1 - 2.k' = 0 \Rightarrow k' = 1/2$$

Autrement dit : le point C doit être à l'aplomb du milieu de c (donnant un triangle isocèle).

Il en découle :

$$\frac{p}{c}\text{ minimal} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2^2} - 2.\frac{1}{2} + 2} + \sqrt{\frac{1}{2^2} + 1} + 1}{2} = \frac{\sqrt{\frac{1}{4} + 1} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1} + 1}{2} = \frac{2\sqrt{\frac{5}{4}} + 1}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \varphi$$

• Conclusion

Une approche radicalement nouvelle, minimisant une somme de dimensions au lieu d'égaliser des ratios, ramène tout droit au nombre d'or.

Et l'analyse fonctionnelle, par le biais des différentielles, conduit — tout autant que la géométrie pure — à trouver un optimum dans le terme φ.

8. l'angle d'or

Après les cas d'optimisation, on peut aborder les domaines où des catalogues de proportions contiennent, entre autres, le nombre d'or.

• Un peu de trigonométrie

Les cours élémentaires ne donnent généralement que le coin en haut à gauche du tableau suivant, concernant les lignes trigonométriques des arcs fractions de π :

arc radians	arc degrés	sinus sin	cosinus cos	tangente tg	sécante sec=1/cos	cosécante cosec=1/sin	cotangente cotg = 1/tg
$\pi/4$	45	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\pi/3$	60	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\frac{2.\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\pi/6$	30	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2.\sqrt{3}}{3}$	2	$\sqrt{3}$
$\pi/5$	36	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\sqrt{5-2.\sqrt{5}}$	$\sqrt{6-2.\sqrt{5}}$	$\sqrt{\frac{10+2.\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{\frac{5+2.\sqrt{5}}{5}}$
$\pi/8$	22,5	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{4-2.\sqrt{2}}$	$\sqrt{4+2.\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}+1$
$\pi/10$	18	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$	$\sqrt{\frac{5-2.\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{\frac{10-2.\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{6+2.\sqrt{5}}$	$\sqrt{5+2.\sqrt{5}}$
$\pi/12$	15	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$2+\sqrt{3}$
$3.\pi/10$	54	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$	$\sqrt{\frac{5+2.\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{\frac{10+2.\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{6-2.\sqrt{5}}$	$\sqrt{5-2.\sqrt{5}}$
$3.\pi/8$	67,5	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{4+2.\sqrt{2}}$	$\sqrt{4-2.\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}-1$
$2.\pi/5$	72	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{5+2.\sqrt{5}}$	$\sqrt{6+2.\sqrt{5}}$	$\sqrt{\frac{10-2.\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{\frac{5-2.\sqrt{5}}{5}}$
$5.\pi/12$	75	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$2-\sqrt{3}$

L'important est que ce tableau peut être entièrement généré à partir de 3 valeurs simples : sin 60°, cos 45°, cos 36° (soit des fonctions de $\pi/3$, $/4$, $/5$, avec des termes en racines de 3, de 2, de 5). Or la troisième de ces valeurs génératrices n'est autre que $\varphi/2$.

L'angle $\pi/5$ a donc un rapport privilégié avec le nombre d'or. Sur la figure I.8.A : $c/r = \varphi$

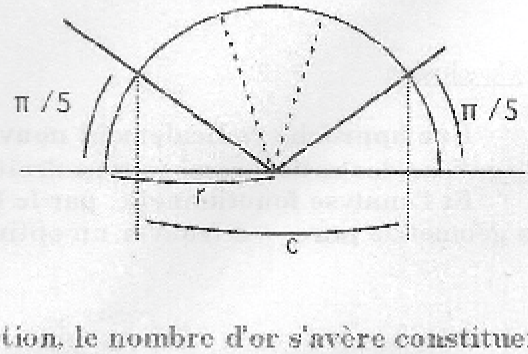


Figure I.8.A

• Conclusion

Indépendamment de tout problème de proportion, le nombre d'or s'avère constituer l'un des piliers de la trigonométrie (le troisième, en fait). Il se trouve donc étroitement lié au nombre π.

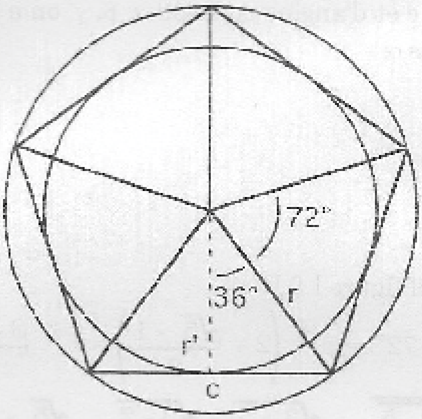
9. le polygone d'or

La séquence des angles $\pi/3$, $\pi/4$, $\pi/5$, vue précédemment, évoque le groupe des polygones réguliers les plus simples : triangle équilatéral, rectangle carré, pentagone convexe. On devrait donc logiquement retrouver le nombre φ dans le pentagone

• Problèmes avec le pentagone

En fait, le côté n'est relié aux rayons (des cercles inscrit et circonscrit) que par une tangente et un sinus (voir figure I.9.A), termes dans lesquels on ne retrouve pas le nombre φ (cf tableau trigonométrique).

Figure I.9.A



C'est en comparant les 2 rayons que l'on résout le problème. On a en effet : $\cos 36° = r'/r$ (avec r' = rayon du cercle inscrit, et r = rayon du cercle circonscrit).

En considérant le diamètre du petit cercle, on a donc, dans un pentagone :

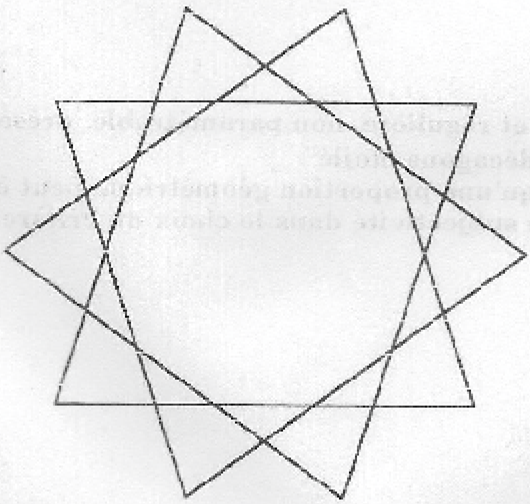
$$d'/r = 2.\cos 36° = 2.\ \varphi/2 = \varphi$$

On met effectivement en évidence le nombre φ, mais le fait de comparer un diamètre à un rayon n'est vraiment pas naturel.

• Un cousin plus satisfaisant

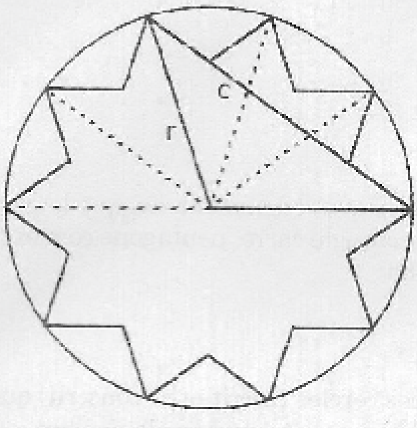
Avec une figure moins simple, on a un rapport plus simple, paradoxalement. Le décagone étoilé (cf figure I.9.B) donne en effet le nombre d'or directement, et sans doublement ad hoc.

Figure I.9.B



La grandeur égale à φ, dans ce polygone, est le ratio côté /rayon de cercle circonscrit (cf figure I.9.C).

Figure I.9.C



La démonstration est facilitée par 3 propriétés mathématiques relativement méconnues
- Dans un triangle quelconque de côtés a, b, c et d'angles opposés α, β, γ, on a l'égalité :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\alpha$$

- $\cos 72° = \dfrac{1}{2.\varphi}$ $(= -\cos 108°)$

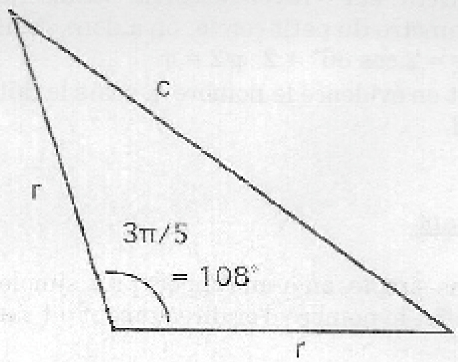
- $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{a^2 - b}}}{\sqrt{2}}$

Le raisonnement est alors le suivant (cf figure I.9.D) :

$$c^2 = r^2 + r^2 - 2.r.r.\cos 108° = r^2.(2 + 2.\cos 72°) = r^2.\left(2 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) = r^2.\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{r} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{3 + \sqrt{9 - 5}} + \sqrt{3 - \sqrt{9 - 5}}}{2} = \frac{\sqrt{3 + 2} + \sqrt{3 - 2}}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \varphi$$

Figure I.9.D



• Conclusion

Une forme complexe et régulière, non-paramétrable, présente une illustration excellente du nombre d'or : le décagone étoilé.

Cet exemple prouve qu'une proportion géométrique peut être égale au terme φ sans qu'intervienne la moindre subjectivité dans le choix du critère d'harmonie.

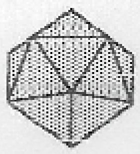
10. le polyèdre d'or

Le fait de faire apparaître la racine de 5, et donc le nombre φ, n'est pas spécifique à la géométrie plane. Les volumes en trois dimensions méritent donc également une étude.

• Problèmes avec l'icosaèdre

L'icosaèdre (cf figures I.10.A vu de face, et I.10.B déplié) est le plus complexe des polyèdres réguliers. Chacun de ses 12 sommets est l'aboutissement d'une pyramide à base pentagonale. Il comporte 20 faces formées de triangles équilatéraux, et au total 30 arêtes.

Figure I.10.A



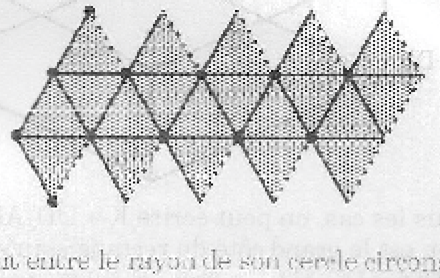


Figure I.10.B

L'isosaèdre présente un ratio assez intéressant entre le rayon de son cercle circonscrit et sa longueur de côté : sin 72°, mais c'est hélas le cos 72° qui est égal à $1/(2\varphi)$. On pourrait certes développer, mais cela aboutirait à une formule trop complexe :

$$\sin 72° = \sqrt{1-\cos^2 72°} = \sqrt{1-\frac{1}{4\varphi^2}} = \frac{\sqrt{2+\varphi}}{2}$$

• Un cousin plus satisfaisant

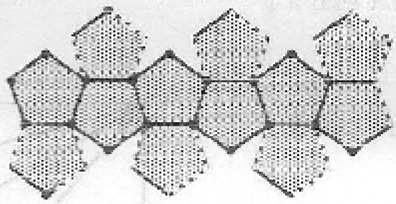


Figure I.10.C

Le dodécaèdre est également un polyèdre à 30 arêtes, mais à 20 sommets. Chacune de ses 12 faces est un pentagone régulier (cf figure I.10.C déplié).

La propriété intéressante pour notre sujet concerne l'angle de dièdre (3), c'est-à-dire l'angle que forment 2 faces en se joignant au niveau d'une arête. La moitié de cet angle, notée α, est en effet définie par $\sin\alpha = \cos 60° / \sin 36°$. Là encore, il est décevant que ce ne soit pas un cos 36° qui intervienne (sachant que $\cos 36° = \varphi/2$), mais tout s'arrange en développant :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\frac{1}{2.\sin 36°}}{\sqrt{1-\frac{1}{4.\sin^2 36°}}} = \frac{\frac{1}{2.\sqrt{1-\cos^2 36°}}}{\sqrt{1-\frac{1}{4.\left(1-\cos^2 36°\right)}}} = \frac{\frac{1}{2.\sqrt{1-\frac{\varphi^2}{4}}}}{\sqrt{1-\frac{1}{4.\left(1-\frac{\varphi^2}{4}\right)}}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{1}{\sqrt{4-\varphi^2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{4-\varphi^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(4-\varphi^2\right)-1}} = \frac{1}{\sqrt{3-\varphi^2}} = \frac{1}{\sqrt{3-(\varphi+1)}} = \frac{1}{\sqrt{2-\varphi}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2-\frac{1+\sqrt5}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3-\sqrt5}} = \sqrt{\frac{2.\left(3+\sqrt5\right)}{9-5}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt5}{2}} = \varphi \quad \text{(cf polygone d'or)}$$

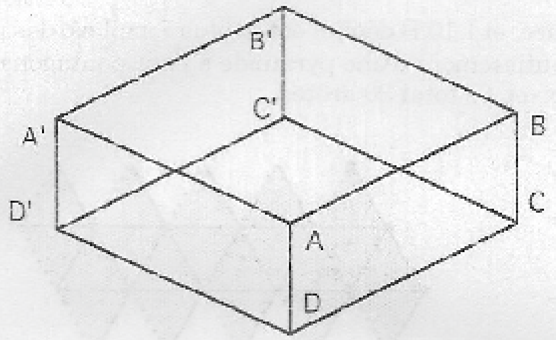
Le dodécaèdre est donc bien fondé sur le nombre d'or, même si c'est de manière peu évidente, par le biais de la tangente de son demi-angle de dièdre.

• Les parallélipipèdes

La perfection des polyèdres réguliers les plus complexes — sortes de sphères à facettes — étant assez éloignée des préoccupations des géomètres architectes, il convient de revenir aux "cubes rectangulaires", autrement dit : aux parallélipipèdes rectangles (cf figure I.10.D).

La question est la suivante : si l'on décide que le fronton (ABCD) a la forme d'un rectangle d'or et que la surface au sol (CDD'C') a la même forme, quelles seront les proportions du rectangle restant, latéral (ADD'A') ?

Figure I.10.D



Dans tous les cas, on peut écrire K = DD'/AD = DD'/DC . DC/AD

— Si le fronton est le grand côté du rectangle au sol (bâtiment peu pronfond), on a :

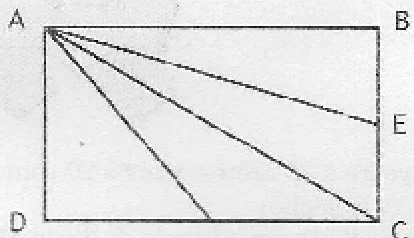
φ = DC/DD' = DC/AD, d'où : K = $1/\varphi \cdot \varphi = 1$ (forme carrée)

— Si le fronton est le petit côté du rectangle au sol (bâtiment pronfond), on a :

φ = DD'/DC = DC/AD, d'où : K = $\varphi.\varphi = 1 + \varphi$ (rectangle très allongé)

Or ce dernier rectangle, considéré isolément (cf ABCD avec AB/AD = φ^2, sur la figure I.10.E), présente une propriété très intéressante, insoupçonnable au premier abord : le ratio de ses médianes AE/AF est égal à φ.

Figure I.10.E



Démonstration :

$$\frac{AE}{AF} = \sqrt{\frac{AB^2 + \frac{AD^2}{4}}{\frac{AB^2}{4} + AD^2}} = \sqrt{\frac{4.\frac{AB^2}{AD^2} + 1}{\frac{AB^2}{AD^2} + 4}} = \sqrt{\frac{4.\varphi^4 + 1}{\varphi^4 + 4}}$$

Sachant que $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^4 = \left(\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)^2 = \frac{3.\sqrt{5}+7}{2}$:

$$\frac{AE}{AF} = \sqrt{\frac{14 + 6.\sqrt{5} + 1}{\frac{7 + 3.\sqrt{5}}{2} + 4}} = \sqrt{\frac{30 + 12.\sqrt{5}}{15 + 3.\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{270 + 90.\sqrt{5}}{180}} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} = \varphi$$

• Le cube grec

Le Parthénon, célèbre temple de la Grèce antique, est un parallélipipède fondé sur un autre rectangle, dit "rectangle Parthénon".

Son rapport grand côté/petit côté ($K = AB/AD$) est de l'ordre de $13/6 = 2.16$. Cette proportion était jugée plus harmonieuse que le rectangle d'or et le double carré (trop compacts) ou que les rectangles "$1+\varphi$" et 5/2, 7/3, 9/4, 11/5 (trop allongés).

Or, il se trouve que ce facteur $K = 2.16$ correspond presque parfaitement à un rectangle fondé sur le nombre d'or : $AC/AF = \varphi$ (cf figure I.10.E).

Démonstration :

$$\frac{AC}{AF} = \varphi \Rightarrow \frac{AC^2}{AF^2} = \varphi^2 \Rightarrow 1 + \varphi = \frac{AB^2 + AD^2}{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + AD^2} = \frac{\frac{AB^2}{AD^2} + 1}{\frac{AB^2}{4.AD^2} + 1} = \frac{K^2 + 1}{\frac{K^2}{4} + 1}$$

$$\Rightarrow (1 + \varphi) \cdot \left(\frac{K^2}{4} + 1\right) = K^2 + 1 \Rightarrow K^2 \left(\frac{3 - \varphi}{4}\right) = \varphi \Rightarrow K = 2 \cdot \sqrt{\frac{\varphi}{3 - \varphi}} = 2.164 \quad (\text{cf } 13/6 = 2.167)$$

Visuellement, ou avec les moyens de mesure de l'époque, on peut estimer que les 2 rectangles sont confondus.

• Conclusion

Dans le domaine de la géométrie à 3 dimensions, le nombre d'or reste omniprésent, tant dans les sphères polyèdriques (dodécaèdre, notamment) que dans les batiments de type cubiques, via les rectangles associés.

Bilan

Le nombre d'or est un nombre d'apparence compliquée, mais ayant des propriétés algébriques d'une simplicité extraordinaire.

Le plus remarquable est que ce nombre constitue la solution la plus simple aux problèmes géometriques de proportion, dans quantité de domaines (section d'un segment, formes de triangles et rectangles), et quelle que soit l'approche suivie.

De plus, ce nombre s'avère constituer l'un des piliers de la trigonométrie, et se retrouve même par le biais de l'analyse différentielle.

Il semble par ailleurs avoir constitué le fondement des merveilles architecturales que sont les pyramides de Cheops ou le Parthénon d'Athènes.

Pour toutes ces raisons, le nombre d'or semble incarner l'harmonie, la perfection.