(II) ETUDE RIGOUREUSE

1. la divine proportion

Les optimisations ayant conduit au nombre d'or sont suspectes d'avoir été guidées par des choix judicieux de situations et d'indices.

Il convient donc de reconsidérer les questions de proportion sans raccourci abusif.

• Mise en équations complète

Si l'on reprend de manière exhaustive le problème du segment (cf figure I.1.A page 2), on peut recenser plusieurs indicateurs de proportion : en plus de K = AB/AX et K' = AX/BX, on a leurs inverses (AX/AB, BX/AX) ainsi que K" = AB/BX (et son inverse : BX/AB).

On note que : $K" = \frac{AB}{BX} = \frac{AB}{AB - AX} = \frac{1}{1 - \frac{AX}{AB}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{K}}$ et $K" = \frac{AB}{BX} = \frac{AX + BX}{BX} = K' + 1$

L'égalité de 2 indices ne débouche donc pas du tout sur une certaine équation magique, mais sur un groupe entier d'équations.

On peut les classer en 3 groupes :

- un indice élémentaire est égal à un autre indice élémentaire : K = K' ; K = K" ; K' = K"
- un indice est égal à son propre inverse : K = 1/K ; K' = 1/K' ; K" = 1/K"
- un indice est égal à l'inverse d'un autre indice : K = 1/K' ; K = 1/K" ; K' = 1/K"

• Résolution brute

(1) AB/AX = AX/BX ⇒ $K = \frac{1}{K - 1} \Rightarrow K = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ (impossible) ou $K = \varphi$ (connu)

(2) AB/AX = AB/BX ⇒ $K = \frac{1}{1 - \frac{1}{K}} \Rightarrow K - 1 = 1 \Rightarrow K = 2 \Rightarrow X = M$

(3) AX/BX = AB/BX ⇒ $K' = K' + 1$ (impossible)

(4) AB/AX = AX/AB ⇒ $K = \frac{1}{K} \Rightarrow K = -1$ (impossible) ou $K = 1 \Rightarrow K' = 1/0$ (impossible)

(5) AX/BX = BX/AX ⇒ $\frac{1}{K - 1} = K - 1 \Rightarrow K^2 - 2K + 1 = 1 \Rightarrow K^2 - 2K = 0$

$\Rightarrow K - 2 = 0 \Rightarrow K = 2 \Rightarrow X = M$

(6) AB/BX = BX/AB ⇒ $\frac{1}{1 - \frac{1}{K}} = 1 - \frac{1}{K} \Rightarrow 1 = 1 + \frac{1}{K^2} - \frac{2}{K} \Rightarrow \frac{1}{K^2} - \frac{2}{K} = 0 \Rightarrow 1 - 2K = 0$

$\Rightarrow K = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow AB < AX$ (impossible)

(7) AB/AX = BX/AX ⇒ $K = K - 1 \Rightarrow 0 = 1$ (impossible)

(8) AB/AX = BX/AB ⇒ $K = 1 - \frac{1}{K} \Rightarrow K^2 - K + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = -3$ (impossible)

$$(9)\ AX/BX = BX/AB \rightarrow \frac{1}{K-1} = 1 - \frac{1}{K} \rightarrow 1 = K - 1 - 1 + \frac{1}{K} \rightarrow K - 3 + \frac{1}{K} = 0$$

$$\Rightarrow K^2 - 3K + 1 = 0 \Rightarrow K = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow K = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \varphi = \varphi^2 \text{ ou } K = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1 - \frac{1}{\varphi} = 2 - \varphi$$

Dans le second cas, on a $AX/BX = BX/AB = \dfrac{1}{\left(1 - \frac{1}{\varphi}\right) - 1} = -\varphi < 0$ (impossible) ;

Dans le premier cas, on a $AX/BX = BX/AB = \dfrac{1}{(1+\varphi) - 1} = \dfrac{1}{\varphi}$, donc $K = \dfrac{1}{\frac{1}{\varphi}} + 1 = \varphi + 1 = \varphi^2$

• Complément

Le nombre d'équations obtenu en égalisant 2 ratios (parmi 6) n'est en fait pas 9.
En effet, $6! / (2! \, 4!) = 6.5 / 2 = 15$. Aux 9 cas recensés, il faut donc ajouter 6 équations liées :

(1 bis) $AX/AB = BX/AX = 1/\varphi$
(2 bis) $AX/AB = BX/AB = 1/2$
(3 bis) $BX/AX = BX/AB$: impossible
(7 bis) $AX/AB = AX/BX$: impossible
(8 bis) $AX/AB = AB/BX$: impossible
(9 bis) $BX/AX = AB/BX = \varphi$

• Synthèse

Pour être complet, il conviendrait de mentionner les indices restants, dans chaque situation possible :

situation	AB/AX	AX/AB	AX/BX	BX/AX	AB/BX	BX/AB
(2), (5)	2	1/2	1	1	2	1/2
(1)	φ	$1/\varphi$	φ	$1/\varphi$	φ^2	$1/\varphi^2$
(9)	φ^2	$1/\varphi^2$	$1/\varphi$	φ	φ	$1/\varphi$

L'approche la plus simple, aurait consisté à ne définir que AX et BX (sans AB) ; au lieu de conclure à une multitude d'équations et de solutions, cela aurait débouché sur la seule équation (5), la scission au milieu et des ratios égaux à 1.

Si l'on définit AB, et que l'on exclut le milieu ("trop simple") et les extrémités (ne définissant pas 2 sous-segments), on aboutit bien à la divine proportion, mais cela fournit 4 nombres au lieu d'un :

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \; ; \; 1/\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \; ; \; \varphi^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \; ; \; 1/\varphi^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Si l'on appelle ψ le dernier de ceux-ci, ces 4 nombres seraient, successivement : $\dfrac{1}{\sqrt{\psi}}$; $\sqrt{\psi}$; $\dfrac{1}{\psi}$; ψ

• Conclusion

Le problème de proportion dans un segment, traité algébriquement, admet pour plus simple solution la scission au milieu, et non la "divine proportion".

Par ailleurs, la divine proportion n'aboutit pas au nombre d'or, mais à 4 nombres dont chacun peut générer très simplement les 3 autres. La définition de φ n'est donc pas justifiée par la divine proportion.

2. le nombre d'or

Le mystère des propriétés algébriques du nombre d'or mérite d'être traîté de manière construite, sans entousiasme désordonné devant chaque inhabituelle égalité.

• L'équation de base

La divine proportion s'exprimait à travers une équation (cf page 2) : $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.
Or les propriétés ultérieurement constatées, avec surprise, étaient entièrement incluses dans cette équation.

On peut en effet écrire l'équation sous la forme : $\varphi^2 = \varphi + 1$

Et, en multipliant par φ à la puissance n, on obtient : $\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n$

Décliner cette propriété, pour les différentes valeurs de n, n'a donc valeur que d'illustration, et non de série incroyable de coïncidences.

• Autres solutions voisines

L'équation considérée $\left(x^2 - x - 1 = 0\right)$ n'admet pas qu'une seule racine. La solution complète est :

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ soit : } \varphi \text{ ou bien } \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi}$$

Sur le plan algébrique, le fait que la seconde valeur soit négative n'est aucunement une raison de l'éliminer. Elle est toute aussi valable que le nombre φ.

De plus, une autre équation, aussi notable, est concevable :

$$x^n = x^{n+2} + x^{n+1} \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ soit } \frac{1}{\varphi} \text{ ou } -\varphi$$

On peut aussi noter, page 12, que la tangente de π/8 présente également une propriété intéressante : $1/x = x + 2$, ce qui introduit des racines de 2 non reliable à φ. Mais la formulation générale est moins marquante que les 2 équations mentionnées ci-dessus :

$$x^{n+2} = x^n - 2.x^{n+1}$$

• Synthèse

Les relations les plus élémentaires entre puissances introduisent 4 nombres :

$$\varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \; ; \; 1/\varphi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \; ; \; -\varphi = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \; ; \; -1/\varphi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Chacun de ces nombres peut générer très simplement les 3 autres, donc aucun n'est particulièrement remarquable.

• Conclusion

Les propriétés algébriques du nombre d'or ne sont pas un mystère indépendant de la définition de ce nombre au moyen de la divine proportion, mais au contraire une simple expression de l'équation introduite géométriquement.

Par ailleurs, les équations de ce genre n'aboutissent pas à élire le nombre d'or, mais à définir 4 nombres (dont 2 déjà vus au niveau de la divine proportion).

Le choix de φ n'est donc pas justifié par l'algèbre.

3. la section d'or

Le complexe mécanisme suggéré pour retouver, sans aucune intervention de l'algèbre, la divine proportion est suspect. Vraisemblablement, il y avait quantité de façons plus simple de scinder un segment.

• Détermination simplissime

Sur la figure II.3.A, on note que le simple tracé de 4 cercles et 1 trait aboutit à définir un point de scission. Par comparaison, la démarche aboutissant au nombre d'or (page 5) requerrait au total 8 cercles et 4 traits.

La figure II.3.B expose une variante de ce même principe.

Question : à quels nombres aboutit la nouvelle démarche ?

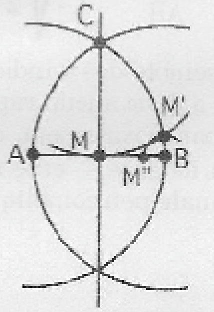


Figure II.3.A

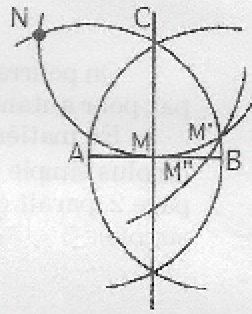


Figure II.3.B

• Mise en équation

Prenons un repère de centre A et d'unité AB. Les coordonnées sont les suivantes :

$$xA = yA = yB = yM = 0 \; ; \; xB = 1 \text{ et } xM = 1/2$$

$$xC = \cos 60° = 1/2 \quad \text{et} \quad yC = \sin 60° = \sqrt{3}\,/\,2$$ (le triangle ABC étant équilatéral)

Le cercle C1 de centre A et de rayon AB a pour équation : $(y - yA)^2 + (x - xA)^2 = AB^2$

le cercle C2 de centre C et de rayon CM : $(y - yC)^2 + (x - xC)^2 = CM^2 = yC^2$

Les coordonnées du point M' sont données par l'intersection des cercles C1 et C2. Puis la distance BM' = BM" peut être calculée et on en déduit AB/BM" etc.

L'intersection de 2 cercles n'est pas couramment décrite dans les manuels, mais on peut trouver la formule assez aisément :

Si les cercles ont respectivement pour coordonnées centrales et rayon : x', y', r' et x", y", r", on a :

$$(y - y')^2 + (x - x')^2 = r'^2 \text{ et } (y - y")^2 + (x - x")^2 = r"^2$$

Il convient de poser X = x - x', Y = y - y', X" = x" - x', Y" = y" - y'. On peut alors écrire :

$X^2 + Y^2 = r'^2$ et $(X - X")^2 + (Y - Y")^2 = r"^2$

$\Rightarrow X^2 = r'^2 - Y^2$ et $X^2 + X"^2 - 2.X.X" + Y^2 + Y"^2 - 2.Y.Y" = r"^2$

$\Rightarrow 2.X.X" = r'^2 - r"^2 + X"^2 + Y"^2 - 2.Y.Y"$

$\Rightarrow 4.X"^2.(r'^2 - Y^2) = (r'^2 - r"^2 + X"^2 + Y"^2 - 2.Y.Y")^2 = (r'^2 - r"^2 + X"^2 + Y"^2)^2 + 4.Y^2.Y"^2 - 4.Y.Y".(r'^2 - r"^2 + X"^2 + Y"^2)$

$\Rightarrow Y^2.4.(X"^2 + Y"^2) + Y.(-4.Y").(r'^2 - r"^2 + X"^2 + Y"^2) + (r'^2 - r"^2 + X"^2 + Y"^2)^2 - 4.X"^2.r'^2$

C'est là une équation du second degré simple à résoudre.

En pratique, on calcule :

1) $X" = x" - x'$, $Y" = y" - y'$

2) $A = 4.(X"^2 + Y"^2)$; $B = -4.Y".(r'^2 - r"^2 + X"^2 + Y"^2)$; $C = (r'^2 - r"^2 + X"^2 + Y"^2)^2 - 4.X"^2.r'^2$

3) Les solutions : $Y = \dfrac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4.A.C}}{2.A}$ d'où on déduit, en échelle initiale : $y = Y + y'$

4) Les abscisses correspondantes : $X = \pm\sqrt{r'^2 - Y^2}$ d'où : $x = X + x'$

• Application numérique

Pour l'intersection des cercles C1 et C2, on a, avec $r' = 1$, $r'' = y'' = \sqrt{3}/2$, $x' = y' = 0$, $x'' = 1/2$:

1) $X'' = 1/2$, $Y'' = \sqrt{3}/2$

2) $A = 4$; $B = -5.\sqrt{3}/2$; $C = 9/16$

3) $Y = y = \dfrac{5.\sqrt{3} + 2.\sqrt{11}}{16}$ d'où $yN = 0{,}96$ et $yM' = 0{,}13$

4) $X = x = \pm\dfrac{\sqrt{137 \pm 20.\sqrt{33}}}{16}$ d'où $xN = -0{,}29$ et $xM' = 0{,}99$

On en déduit la distanse $AB'' = BM' = \sqrt{(xB - xM')^2 + (yB - yM')^2}$, avec AB pour unité, d'après la convention initiale.

En généralisant, on a donc (après simplification du terme sous racine) :

$$BM'/AB = \sqrt{2 - \frac{\sqrt{137 + 20.\sqrt{33}}}{8}} = 0{,}13 \quad \text{(en fait 0,1269 — cf 0,1267 pour xM')}$$

$$\text{et } K = AB/AM'' = \frac{AB}{AB - BM''} = \frac{AB}{AB - BM'} = \frac{1}{1 - \frac{BM'}{AB}} = \frac{1}{1 - \sqrt{2 - \frac{\sqrt{137 + 20.\sqrt{33}}}{8}}} = 1{,}15$$

On pourrait énoncer, comme en page 20, l'ensemble des 6 indicateurs de proportion, cela ne ferait pas pour autant apparaître des racines de 5. Il n'y a donc aucun rapport avec le nombre d'or.

En matière de nombre compliqué s'avérant, paradoxalement, constituer la solution la plus simple du plus simple des problèmes de proportion, on est ici gâté — et le nombre d'or, encensé en bas de page 2, paraît comparativement fade (expression finale peu compliquée, et solution géométrique peu simple).

• Amélioration de la précision

Le très simple mécanisme de la figure II.3.A présente un défaut, c'est que le cercle M'M" a un très petit rayon (0,13.AB << 0,5.AB), propice aux fortes erreurs relatives.

Une solution, peu intuitive mais simple, consisterait à centrer ce cercle non pas sur B mais sur N (cf figure II.3.B, page précédente).

Le point M" est l'intersection de l'axe des absisses (y = 0) avec le nouveau cercle.

$$(xM'' - xN)^2 + (0 - yN)^2 = NM'^2 \Rightarrow xM''^2 + xM''.(-2.xN) + (xN^2 + yN^2 - NM'^2) = 0$$

$$\Rightarrow xM''^2 = \frac{2.xN + \sqrt{4.xN^2 - 4.(xN^2 + yN^2 - NM'^2)}}{2} = xN + \sqrt{NM'^2 - yN^2}$$

$$\Rightarrow xM''^2 = \frac{xN + \sqrt{(xN - xM')^2 + (yN - yM')^2 - yN^2}}{2}$$

On en déduit, après calcul sur les valeurs algébriques :

$$K = AB/AM'' = 1/xM'' = \frac{16}{\sqrt{331 + 2.\sqrt{5569} - 20.\sqrt{33}} - \sqrt{137 - 20.\sqrt{33}}}$$

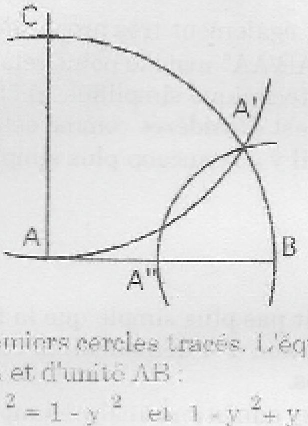
Cela donne K = 1,11, ce qui est évidemment voisin du K = 1,15 avec centrage du dernier cercle sur B, et reste très éloigné de la divine proportion.

• Mise à disposition d'une équerre

— Le fait de devoir tracer une orthogonale en B avait requis 3 cercles et 2 traits, sur la figure I.3.C, page 5. Or avec une équerre, on réaliserait le même travail en 1 trait, ce qui ramènerait la découverte de la section d'or à 5 cercles et 3 traits (au lieu de 8 et 4). Rappelons qu'en traçant la figure I.3.A, un géomètre débutant peut avoir sous les yeux une orthogonale, ce qui permet de construire une équerre.

— Quoi qu'il en soit, les 5 cercles avec équerre restent plus compliqués que les 4 cercles sans équerre vus sur les figures II.3.A et B. Cependant, le fait de disposer d'une équerre permet de trouver un nouvel optimum en simplicité : 3 cercles et 1 traits (cf figure II.3.C).

Figure II.3.C



Le point A' est l'intersection des 2 premiers cercles tracés. L'équation de ceux-ci est simple, pour peu que l'on choisisse un repère de centre A et d'unité AB :

$$x^2+y^2=1 \quad \text{et} \quad x^2+(y-1)^2=1 \quad \Rightarrow \quad x^2=1-y^2 \quad \text{et} \quad 1-y^2+y^2+1-2y=1$$

$$\Rightarrow \quad 2y=1 \Rightarrow y=1/2 \Rightarrow x=\sqrt{3}/2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{A'B}{AB}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2}=\frac{\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2+1}}{2}=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}$$

$$\Rightarrow K=\frac{AB}{AA''}=\frac{AB}{AB-A''B}=\frac{AB}{AB-A'B}=\frac{1}{1-\frac{A'B}{AB}}=\frac{1}{1-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=2{,}07$$

— On pourrait craindre que la démarche qui précède emploie un trop petit cercle, celui de rayon A'B, mais : $A'B = AB.\sqrt{2-\sqrt{3}} = 0{,}52.\ AB$ $\left(>0{,}5\,AB,\ \text{acceptable}\right)$.

Avec un trait supplémentaire en CB (cf figure II.3.D), on aurait pu accroître ce rayon, en changeant de centre pour le dernier cercle. Avec le trait CB et le centre B classique (figure II.3.E), on obtient une version améliorée, proche et simplifiée, de la section d'or (cf figure I.3.D).

Figure II.3.D

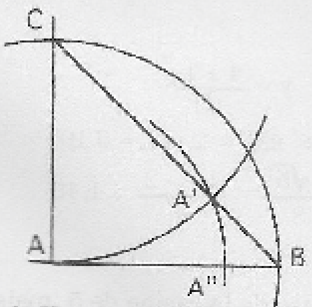
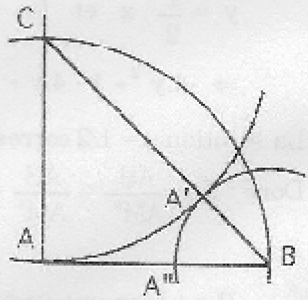


Figure II.3.E



Le calcul de K pour les 2 figures qui précèdent nécessite la connaissance du point A'. Celui-ci est l'intersection de l'oblique CB (y = 1 - x, en unités AB) et du cercle de centre C et de rayon CA = AB :

$$(x-0)^2+(y-1)^2=AB^2 \quad \Rightarrow \quad 2.x^2=AB^2 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{AB}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad y=AB.\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\text{Donc : } AA'/AB=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-0\right)^2+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}-\frac{2}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2-\sqrt{2}}=2.\ \sin\pi/8=0{,}77$$

$$\text{et } BA'/AB=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)^2+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{2\left(\frac{1}{2}+1-\sqrt{2}\right)}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow BA'/AB=\frac{\sqrt{3+\sqrt{9-8}}-\sqrt{3-\sqrt{9-8}}}{\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1=\operatorname{tg}\pi/8=0{,}41$$

Pour la figure II.3.D : $K = \frac{AB}{AA"} = \frac{AB}{AA'} = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} = 2.\cos \pi/8 \,.\, \cos \pi/4 = 1{,}31$

Pour la figure II.3.E : $K = \frac{AB}{AA"} = \frac{AB}{AB - BA"} = \frac{AB}{AB - BA'} = \frac{1}{1 - \frac{BA'}{AB}} = \frac{1}{2-\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow K = \frac{2-\sqrt{2}}{2} = \frac{\cos^{2} \pi/8}{2} = \frac{2}{1+tg^{2}\pi/8} = 1{,}70$$

Les solutions obtenues sont d'une simplicité remarquable, et font apparaître un terme trigonométrique notable : la tangente de π/8, dont les propriétés algébriques sont presque comparables à celle du nombre d'or (cf page 20).

La valeur de K obtenue est également très proche de la section d'or (K = 1,70 au lieu de 1,62). L'indice intuitif n'étant pas K = AB/AA" mais le point relatif de coupure AA"/AB = 1/K, on peut dire que la section d'or coupe à 62% et la technique simplifiée : à 59%. Visuellement, il est difficile de faire la différence. Et si cette proportion est considérée comme esthétiquement harmonieuse, rien ne justifie donc le recours au nombre d'or : il y a beaucoup plus simple.

• <u>Connaissance du milieu</u>

— La figure II.3.C n'est en fait pas plus simple que la figure I.3.D qui avait donné la section d'or ; la différence vient du fait que la section d'or demandait la connaissance du milieu, laquelle requerrait 2 cercles et 1 trait supplémentaires.

Après avoir admis l'équerre, admettons maintenant que l'on connaisse d'emblée le milieu — par exemple parce qu'AB est un segment souple, dont on peut localiser le milieu par simple pliage. Cette fois, retombe-t-on bien sur la section d'or comme plus simple solution ? La réponse est doublement négative : alors que la section d'or requiert 3 cercles et 2 traits, on peut imaginer plus simple : soit 2 cercles et 2 traits (cf figure II.3.F), soit 3 cercles et 1 trait (cf figure II.3.G)

Figure II.3.F

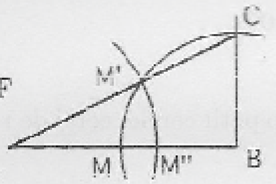
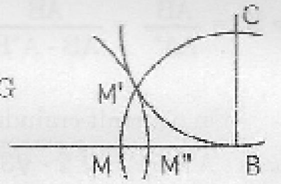


Figure II.3.G



— Sur la figure II.3.F, M' est l'intersection de la diagonale AC et du cercle de centre B et rayon BM. On peut donc écrire, dans le repère de centre A et d'unité AB :

$$y = \frac{1}{2}.x \quad \text{et} \quad (x-1)^{2} + y^{2} = BM^{2} = \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow \; 4.y^{2} + 1 - 4.y + y^{2} = \frac{1}{4} \;\rightarrow\; 5.y^{2} - 4.y + \frac{3}{4} = 0 \;\Rightarrow\; y = \frac{4 \pm 1}{10}$$

La solution y = 1/2 correspond au point C, donc yM' = 3/10 → xM' = 2.yM' = 6/10.

Donc : $K = \frac{AB}{AM"} = \frac{AB}{AM'} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{10}\right)^{2} + \left(\frac{6}{10}\right)^{2}}} = \frac{10}{\sqrt{45}} = \frac{2.\sqrt{5}}{3} = \frac{4.\varphi - 2}{3} = 1{,}49$

Il y a bien une vague parenté avec le nombre d'or, à cause de la racine de 5, mais on ne peut pas dire que cette approche conduit, à proprement parler, à définir le nombre d'or.

— Sur la figure II.3.G, M' est l'intersection des 2 premiers cercles : centre B/rayon BM et centre C/rayon BC. Ceci donne, dans le repère (A,AB)

$$(x-1)^{2} + y^{2} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad (x-1)^{2} + \left(y - \frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \; x^{2} - 2x + \left(y^{2} + \frac{3}{4}\right) = 0 \quad \text{et} \quad y^{2} = \left(y - \frac{1}{2}\right)^{2} \;\rightarrow\; y = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\left(\frac{1}{16} + \frac{3}{4}\right)}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Les 2 valeurs de x se réfèrent au point M' et à son symétrique par rapport à BC, qui a une absisse > 1.

Donc : $xM' = 1 - \frac{\sqrt{3}}{4}$ $\left(\text{et } yM' = \frac{1}{4}\right)$

D'où on tire :

$$K = \frac{AB}{AM''} = \frac{AB}{AM'} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}} = \frac{4}{\sqrt{1 + \left(4 - \sqrt{3}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}} = 1{,}61$$

— On pourrait envisager des variantes des figures II.3.F et G en centrant le dernier cercle sur M au lieu de A, mais il s'agirait là d'un petit cercle imprécis. De même, il serait possible de centrer le dernier cercle sur C, mais la distance CM' étant inférieure (II.3.F) ou égale (II.3.G) à CB, on croiserait AB au niveau de B ou au delà, ce qui ne convient pas.

Il y a toutefois une variante correcte à grand cercle, pour la figure II.3.F : 2 traits et 2 cercles de même rayon. La figure II.3.H la présente, inversée, de manière à ce que AM" reste le grand segment.

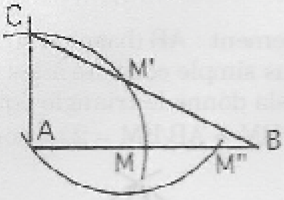


Figure II.3.H

A cause de l'inversion des abscisses, M' est ici symétrique du point ainsi nommé sur la figure II.3.F. On a donc xM' = 4/10 au lieu de 6/10, yM' étant inchangé : 3/10.

M" est l'intersection de AB (y = 0) avec le cercle de centre M' et de rayon AM' = AM. On a donc :

$$\left(xM'' - xM'\right)^2 + \left(yM'' - yM'\right)^2 = AM^2 \Rightarrow \left(xM'' - \frac{4}{10}\right)^2 + \left(0 - \frac{3}{10}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow xM''^2 - \frac{8}{10} \cdot xM'' = 0$$

$\Rightarrow xM'' = 8/10 = 4/5$

Note : ce point est distinct des points accessibles par les découpages médians successifs (cf page 4) ; ces derniers sont des multiples de 1/2, 1/4 ou 1/8 — et non de 1/5. Autrement dit : ce très simple découpage à 80% de AB, sur la figure II.3.H n'avait pas été envisagé, quand on avait créé la série des 50% / 75% / 62,5% / 87,5% etc.

Pour en revenir à notre formulation habituelle, moins intuitive que le % AM"/AB, mais qui avait servi à faire émerger le nombre d'or (φ à la place de son redoutable concurrent 1/φ - cf pages 19 et 20) on trouve ici : $K = \frac{AB}{AM''} = \frac{1}{xM''} = \frac{5}{4} = 1{,}25$ (pile)

• Synthèse

La section d'or ne figure pas parmi les solutions géométriques les plus simples au problème de section asymétrique d'un segment.

L'optimum absolu, géométriquement (II.3.A ou B), est beaucoup plus marquant que le nombre d'or, en matière de complexité algébrique issu d'une géométrie simple.

La solution la plus élégante, sur le compromis de simplicité algèbre/géométrie (II.3.D), est plus simple que le nombre d'or sur les 2 plans, introduisant des propriétés algébriques également rares, et fournissant un point de coupure visuellement indifférentiable de la section d'or.

L'optimum absolu, algébriquement (II.3.H), correspond à un découpage intuitif élémentaire, et s'obtient — sans règle graduée — par un raccourci géométrique ingénieux dans la démarche conduisant laborieusement à la section d'or.

• Conclusion

La divine proportion n'a rien d'optimale sur le plan purement géométrique, elle n'apparaît que si l'on suit une approche très particulière, injustifiable en matière de simplicité.

La perfection esthétique de la section d'or est par ailleurs récusée : une section très voisine, indifférentiable visuellement, peut être obtenue plus simplement, et sans aucun rapport avec le nombre d'or.

4. le triangle d'or

La définition du triangle d'or, ou triangle deCheops, présentait clairement 2 points fragiles : le recours à un triangle rectangle plutôt qu'à un triangle isocèle, et l'élévation au carré des indices, au niveau des ratios considérés comme proportions.

• Optimisation du triangle isocèle

Sur la figure II.4.A, les indices élémentaires sont clairement : AB (base) et AC = BC = AO = BO' (rayon de construction). Pour fixer leur valeur relative, le plus simple consiste à les prendre égaux : AB = AC = CB, autrement dit : AB/AC = AB/CB = AC/CB = 1. Cela donne le triangle équilatéral de la figure II.4.B, et pas du tout le triangle d'or (cf page 6) : on a ici BC/BM = AB/BM = 2 et non BC/BM = φ = 1,6.

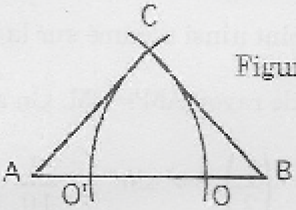


Figure II.4.A

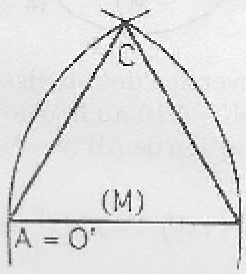


Figure II.4.B

Tout autre choix dimensionnel serait moins simple.

• Optimisation du triangle rectangle : approche circulaire

Si l'on décidait que le triangle idéal est forcément rectangle, pour des raisons subjectives (esthétiques ?), la démarche suivie pour le triangle isocèle pourrait être transcrite directement. Sur la figure II.4.C, le triangle est élaboré à partir de MB (base) et MO = MC (rayon de construction). Pour fixer leur valeur relative, le plus simple consiste à les prendre égaux : MB = MO = MC, autrement dit : MB/MO = MB/MC = MO/MC = 1. Cela donne le triangle de la figure II.4.D, et pas du tout le triangle d'or : on a ici BC/BM = $\sqrt{2}$ = 1,4 et non BC/BM = φ = 1,6.

Figure II.4.C

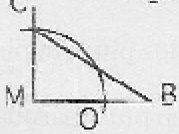
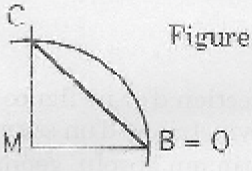


Figure II.4.D



• Optimisation du triangle rectangle : approche dimensionnelle

Un triangle rectangle n'a aucunement besoin de se construire à partir d'un cercle et donc d'un point 0 situé sur la ligne MB : il suffit de sélectionner directement un point C de l'orthogonale (cf figure II.4.E). On a alors 3 indices dimensionnels : MB, MC, BC et 2 indices angulaires : ß, γ.

Si l'on prend l'égalité des 2 angles, on retombe sur le triangle de la figure II.4.D, avec BC/BM = $\sqrt{2}$. Celui-ci est donc particulièrement notable. Mais on peut aussi, de manière plus compliquée, considérer l'égalité de 2 ratios dimensionnels. Avec 3 mesures, on retombe sur le cas des pages 18-19 : 6 ratios possibles (3 élémentaires + leurs inverse) et 15 équations d'égalité (9 élémentaires + 6 équivalentes).

On peut ainsi définir k = BC/CM, k' = CM/BM, k" = BC/BM ; il en découle :
ß = arcsec k = arctg k' = arcsec k" et γ = arcsec k = arctg k' = arcsec k"

$$k' = \sqrt{\frac{CM^2}{BM^2}} = \sqrt{\frac{CM^2}{BC^2 - CM^2}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{BC^2}{CM^2} - 1}} = \sqrt{\frac{1}{k^2 - 1}} \; ; \; k'' = \sqrt{\frac{BC^2}{BM^2}} = \sqrt{\frac{BC^2}{BC^2 - CM^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{CM^2}{BC^2}}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{k^2}}}$$

Les 9 équations à traiter sont les suivantes :

(1) BC/CM = CM/BM : $\Rightarrow k^2 = \frac{1}{k^2 - 1} \Rightarrow k^4 - k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\varphi}$

(2) BC/CM = BC/BM : $\Rightarrow$ CM = BM $\Rightarrow k = \sqrt{2}$
(3) BC/BM = CM/BM : $\Rightarrow$ BC = CM (impossible dans un triangle rectangle)
(4) BC/CM = CM/BC : $\Rightarrow$ BC = CM (impossible dans un triangle rectangle)
(5) CM/BM = BM/CM : $\Rightarrow$ CM = BM $\Rightarrow k = \sqrt{2}$
(6) BC/BM = BM/BC : $\Rightarrow$ BC = BM (impossible dans un triangle rectangle)
(7) BC/CM = BM/CM : $\Rightarrow$ BC = BM (impossible dans un triangle rectangle)
(8) BC/CM = BM/BC : $\Rightarrow$ BC/CM < 1 ou BC/BM < 1 ou BC = CM = BM
(tous ces cas sont impossibles dans un triangle rectangle)

(9) CM/BM = BM/BC :

$$\Rightarrow \frac{1}{k^2 - 1} = 1 - \frac{1}{k^2} \Rightarrow 1 = k^2 - 2 + \frac{1}{k^2} \Rightarrow k^4 - 3k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$\Rightarrow k = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} < 1$ (impossible dans un triangle rectangle), ou $k = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\varphi^2} = \varphi$

- <u>Synthèse</u>

situation	BC/CM	CM/BC	CM/BM	BM/CM	BC/BM	BM/BC	ß	γ
triangle isocèle optimal (triangle équilatéral)	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{1}{2}$	60°	30°
triangle rectangle optimal équations (2), (5)	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	45°	45°
triangle d'or équation (1)	$\sqrt{\varphi}$	$\frac{1}{\sqrt{\varphi}}$	$\sqrt{\varphi}$	$\frac{1}{\sqrt{\varphi}}$	φ	$\frac{1}{\varphi}$	52°	38°
inverse du triangle d'or équation (9)	φ	$\frac{1}{\varphi}$	$\frac{1}{\sqrt{\varphi}}$	$\sqrt{\varphi}$	$\sqrt{\varphi}$	$\frac{1}{\sqrt{\varphi}}$	32°	58°

Les nombres en racines de 5 qui apparaissent sont donc, sans distinction :

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \; ; \; \frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \; ; \; \sqrt{\varphi} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \; ; \; \frac{1}{\sqrt{\varphi}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

L'inverse du triangle d'or a, en tant que triangle rectangle, la même forme que le triangle d'or. Leur différence n'est qu'un changement de disposition (petit côté vertical ou horizontal). Mais, si l'on en revient à l'approche isocèle, ces 2 triangles génèrent des pyramides bien distinctes (cf figure II.4.F).

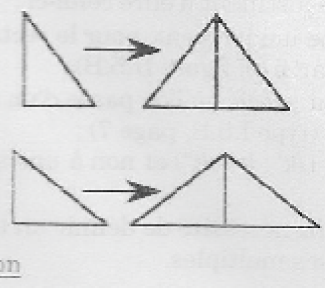


Figure II 4 F

- <u>Conclusion</u>

La recherche de triangles simples, harmonieux, ne conduit pas droit au triangle d'or, celui-ci n'intervient qu'au troisième rang.

Par ailleurs, ce triangle n'a aucune supériorité sur le triangle inverse, et tous deux n'introduisent pas directement le nombre d'or — mais un groupe de 4 nombres, dont chacun peut générer les 3 autres.

<u>La définition de φ n'est donc pas justifiée par l'optimisation de forme des triangles.</u>

5. le rectangle d'or

Tout ce qui vient d'être dit pour le triangle rectangle optimal s'applique évidemment au rectangle optimal, en prenant le côté oblique comme diagonale. Cependant, l'étude initiale abordait les rectangles d'une manière différente, et il convient d'examiner les défauts spécifiques à cette approche.

• Mise en équation complète

Sur la figure II.5.A, consistant (comme I.5.B) à décomposer un rectangle en un carré initial + un ajout, on note 3 indices élémentaires : AB, A'B, AD = AA'.

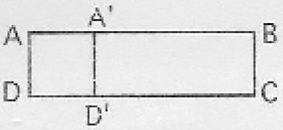


Figure II.5.A

Aux indices K = AB/AD et K' = AD/A'B, il convient d'ajouter K" = AB/A'B. Outre la relation K' = 1/(K - 1) déjà signalée, on a :

$$K" = \frac{AB}{A'B} = \frac{AB}{AB - AA'} = \frac{1}{1 - \frac{AA'}{AB}} = \frac{1}{1 - \frac{AD}{AB}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{K}}$$

La situation est donc très exactement la même que celle décrite pages 18-19. Si l'on exclut le cas d'un ajout nul, il reste 3 possibilités (voir synthèse page 19) :

- k = k" = 2, ce qui correspond ici à un double-carré
- k = k' = φ, ce qui correspond ici au rectangle d'or
- k" = 1/k' = φ (avec k = φ^2 = 1 + φ), ce qui correspond ici au rectangle complémentaire signalé page 16

• Jugement de simplicité sur les cas dénombrés

Si le rectangle k" = φ ne correspond à rien d'intuitif, le double-carré et le rectangle d'or présentent des propriétés similaires :

- soit : pièce ajoutée (carré) = pièce initiale (carré)
- soit (cf page 7) : pièce ajoutée (rectangle d'or) = pièce finale (rectangle d'or)

Cependant, plusieurs éléments spécifiques au double-carré justifient d'élire celui-ci :

- l'égalité ci-dessus est valable en forme et dimension (cf en forme uniquement, pour le rectangle d'or) ;
- il s'agit d'un rectangle traçable très simplement à partir d'un carré (cf figure II.5.B) ;
- dans l'échelle des rectangles, le double carré représente le point précis où l'on passe d'un ajout sous forme de rectangle "couché" (type II.5.A) à un rectange "debout" (type I.5.B, page 7) ;
- ce rectangle correspond à 2 des 9 équations élémentaires (k' = 1/k' ; k = k") et non à une seule, il est donc doublement remarquable ;
- ce rectangle est déterminable par l'équation AD = A'B, donc sans nécessité de définir un troisième indice (AC) source de 8 équations supplémentaires, et de réponses multiples.

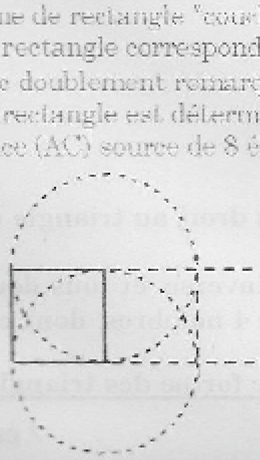


Figure II.5.B

• Approche sans carré

Après les cas ajout = initial et ajout = final, on peut envisager le cas complémentaire : initial = final. Ou mieux : initial = ajout = final.

Ceci n'est évidemment pas possible en partant d'un carré (sauf superposition sans intérêt), mais cela devient réalisable si l'on évacue la filiation entre carré et rectangle. Après tout, on recherche le rectangle optimal, et ceci n'implique aucunement d'en extraire un carré.

La figure II.5.C montre que l'on n'a plus AA' = AD. Par contre, la conservation de forme donne :
K = AB/AD = AD/AA' = A'D/A'B

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AA'} = \frac{AD}{AB - AA'} \rightarrow AA' = AB - AA' \text{ et } AD^2 = AA'.AB$$

$$\Rightarrow AD^2 = \frac{AB^2}{2} \text{ et } K = \frac{AB}{AD} = \sqrt{\left(\frac{AB}{AD}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow K' = \frac{AD}{A'B} = \frac{AD}{\frac{AB}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \text{ et } K'' = \frac{AB}{A'B} = \frac{AB}{\frac{AB}{2}} = 2$$

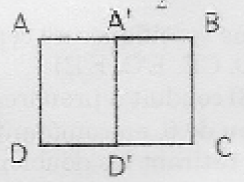


Figure II.5.C

Note : le facteur racine de 2 = 1,414 (comme rapport K, entre grand côté et petit côté) est celui que l'on retrouve dans les feuilles A4 : 29,7 / 21,0 = 1,414.

(Les valeurs précises 29,7 cm et 21,0 cm viennent, indépendamment, de la définition de l'échelle A4 : surface = $\frac{100 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm}}{2^4}$)

• Synthèse

type	AB/AD	AD/AB	AD/A'B	A'B/AD	AB/A'B	A'B/AB	Propriétés
optimum absolu (à base quelconque)	$\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$2/\sqrt{2}$	$\sqrt{2}/2$	2	1/2	Base des feuilles A4 final = ajout (forme) initial = ajout
optimum relatif (à base carrée)	2	1/2	1	1	2	1/2	Facile initial = ajout
rectangle d'or	φ	$1/\varphi$	φ	$1/\varphi$	φ^2	$1/\varphi^2$	final = ajout (forme)
rectangle 1 + φ	φ^2	$1/\varphi^2$	$1/\varphi$	φ	φ	$1/\varphi$	ajout = rectangle d'or

Comme pour la divine proportion, les ratios avec racines de 5 sont au nombre de 4, sans hiérarchie particulière.

• Conclusion

En ce qui concerne les rectangles, considérés indépendamment de leur diagonale (donc sans rpport avec des triangles), la configuration issue du nombre d'or arrive une nouvelle fois en troisième position. dans l'échelle de simplicité et d'harmonie.

Classiquement, le rectangle d'or est accompagné d'un cousin inversé, et chacun génère 4 nombres, reliables les uns aux autres, sans que le nombre d'or ait un statut spécifique.

La définition de φ n'est donc pas justifiée par l'optimisation de forme des rectangles.