6. l'inscription d'or

L'optimisation de rectangle associée aux cercles inscrits constituait une démarche très peu intuitive, qui pouvait facilement dérouter. Même si le sujet s'avère complexe, on peut — avec le recul apporté par les chapitres précédents — tenter de systématiser l'étude, en posant de manière objective les problèmes.

Ce n'est qu'à ce prix qu'il est possible de se faire une opinion sur le caractère optimal du rectangle fondé sur le nombre d'or (qui est ici le double-carré, d'après les indices retenus en pages 8-9).

• Mise en équations élémentaire

— La figure I.6.A (ou II.6.A ci-dessous) fait apparaître plusieurs dimensions spécifiques au cercle inscrit, par rapport aux coins du rectangle : AE, AO, AE', EO, EE' (ou CE', CO, CE, E'O, E'E).

Le fait d'avoir 5 indices au lieu de 3 habituellement (cf pages 18, 26, 28) conduit à prendre peur : ceci laisse en effet présager 10 ratios élémentaires au lieu de 3 (soit 20 au lieu de 6, en comptant les inverses), et 153 équations au lieu de 15 (soit <u>100</u> équations au lieu de 9, en retirant les doublons).

Explication : nombre de combinaisons de 2 parmi 5 = 5.4 / 2 = 10 (cf parmi 3 : 3/1 = 3)
nombre de combinaisons de 2 parmi 20 = 20.19 / 2 = 190 (cf parmi 6 : 6.5/2 = 15)
nombre non-doublés avec 10 inverses = (190+10) /2 = 100 (cf avec 3 : (15+3) /2 = 9

Même si l'expérience conduit à prévoir l'annulation de deux tiers des équations, pour cause d'impossibilité, cela laisse envisager une trentaine de solutions, ce qui n'a plus rien à voir avec une optimisation ciblée.

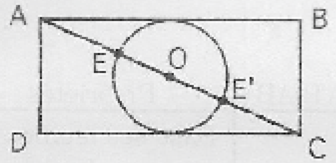


Figure II.6.A

— Une première solution consiste à court-circuiter l'étape des ratios ternaires, c'est-à-dire chercher les cas où 2 dimensions élémentaires sont égales, simplement : $a/b = b/a \Leftrightarrow a = b$

Cette démarche aurait conduit, dans les paragraphes précédents, aux résultats suivants :
- segment (pages 18-19) : $AX = BX$ est la seule possibilité $\Rightarrow X = M$ (ce qui a été considéré optimal)
- triangle isocèle (page 23) : $AC = AB \Rightarrow$ triangle équilatéral (ce qui a été considéré optimal)
- triangle rectangle (pages 26-27) : $BM = CM \Rightarrow \beta = 45°$ (ce qui a été considéré optimal)
- rectangle (pages 28-29) : $AD = AT \Rightarrow$ double-carré (ce qui a été considéré optimal)

Bref, il semble bien que l'on ait là un raccourci pour trouver le cas optimal, même si la technique a l'inconvénient de ne pas faire apparaître les solutions mineures. Ce qui nous intéresse, dans ce chapitre, étant de vérifier si l'optimum est fondé sur le nombre d'or, la démarche peut donc être retenue, en dépit de son manque d'exhaustivité.

— Avec 5 indices (au lieu de 3), on n'aurait pas ici que 3 possibilités dont 2 impossibles, mais 10 possibilités — qu'il convient d'étudier.

Dans tous les cas, le facteur reliant le grand côté du rectangle au petit côté peut s'écrire :

$$K = \frac{AB}{AD} = \frac{\sqrt{AC^2 - BC^2}}{EE'} = \frac{\sqrt{4.AO^2 - EE'^2}}{EE'} = \sqrt{4.\left(\frac{AO}{EE'}\right)^2 - 1}$$

(1) $AE = AO \Rightarrow E = O \Rightarrow$ diamètre nul (impossible, à partir d'un rectangle)

(2) $AE = AE' \Rightarrow E = E' \Rightarrow$ diamètre nul (impossible)

(3) $AE = EO \Rightarrow K = \sqrt{4.\left(\frac{AE + EO}{2.EO}\right)^2 - 1} = \sqrt{4.\left(\frac{2.EO}{2.EO}\right)^2 - 1} = \sqrt{3}$

(4) $AE = EE' \Rightarrow K = \sqrt{4.\left(\frac{AE + \frac{EE'}{2}}{2.EO}\right)^2 - 1} = \sqrt{4.\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1} = \sqrt{8} = 2.\sqrt{2}$

(5) AO = AE' ⇒ O = E' ⇒ diamètre nul (impossible)
(6) AO = EO ⇒ A = E (impossible)
(7) AO = EE' ⇒ $K = \sqrt{4.(1)^2 - 1} = \sqrt{3}$
(8) AE' = EO ⇒ EE' < EO (impossible)
(9) AE' = EE' ⇒ A = E (impossible)
(10) EO = EE' ⇒ O = E' ⇒ diamètre nul (impossible)

On note que les seules solutions consistent à avoir le segment AE égal au rayon ou au diamètre du cercle inscrit — ce que l'on aurait d'ailleurs pu prévoir sans accorder aux autres cas une équation.

On aboutit donc, comme optimum, au rectangle $K = \sqrt{3} = 1{,}73$ (avec les justifications AE = EO et AO = EE', autrement dit, en termes de ratios : AE/EO = AO/EE' = 1), et secondairement au rectangle $K = \sqrt{8} = 2{,}83$ (avec la simple justification AE = EE').

Les solutions optimales n'auraient donc aucun rapport avec le nombre d'or, pas plus qu'avec le double-carré (K = 2).

• Mise en équations sans point central

Si l'on compare la démarche qui vient d'être appliquée à celle pratiquée en page 8, on note que les indices AO et EO n'avaient pas été définis. Certes, cela aurait pu être un oubli coupable, comme l'omission de facteur k" au niveau de la divine proportion, de la section d'or, du triangle d'or ou du rectangle d'or. Mais ici, il est juste de remarquer que le point O n'est pas défini par une quelconque intersection entre le rectangle et son cercle inscrit (il n'avait de sens que si l'on voulait raisonner en termes de rayon plutôt que de diamètres, ou visuellement pour montrer le principe de construction du cercle inscrit).

— Il est donc légitime de ne retenir que 3 mesures : AE, AE', EE'. Par contre, au lieu de partir de manière désordonnée vers 8 ratios élémentaires, on fera le rapprochement entre EE'A et le segment AXB de la divine proportion. Ceci conduit à choisir les ratios suivants, pour éviter de repasser en revue 9 équations :

m = AE'/EE' ; m' = EE'/AE ; m" = AE'/AE

Autrement dit : m' correspond au k de la page 8, et m correspond au k' de la page 8, tandis que m" est nouveau.

Pour vérifier la conformité aux conditions de la divine proportion, il faut vérifier les relations entre ces 3 indices :

$$m' = \frac{EE'}{AE} = \frac{EE'}{AE' - EE'} = \frac{1}{\frac{AE'}{EE'} - 1} = \frac{1}{m-1} \; ; \quad m'' = \frac{AE'}{AE} = \frac{AE'}{AE' - EE'} = \frac{1}{1 - \frac{EE'}{AE'} \cdot 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{m}}$$

— Le tableau de résultats des 9 équations est donc identique à celui de la page 19, en remplaçant simplement les titres de colonne : respectivement m, 1/m, m', 1/m', m", 1/m". Les 3 solutions sont :
- préférentiellement (car à partir de 2 équations, et dont l'une aurait évité de travailler sur 3 indices et donc de multiplier les solutions) : m = 2
- sinon : m = φ , ou la solution apparentée : m = φ²

— Pour clarifier les idées, il convient d'ajouter le terme K = AB/AD, spécifique des rectangles et employé pour conclusion dans la mise en équations élémentaire (les racines de 3 et 8 étaient trouvées, au lieu de la valeur 2 attendue).

Pour calculer K, il faut s'affranchir du point O :

$$K = \sqrt{4.\left(\frac{AO}{EE'}\right)^2 - 1} = \sqrt{4.\left(\frac{AE + \frac{EE'}{2}}{EE'}\right)^2 - 1} = \sqrt{4.\left(\frac{1}{m'} + \frac{1}{2}\right)^2 - 1} = \sqrt{4.\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - 1}$$

Pour m = 2, $K = \sqrt{4.\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1} = \sqrt{8}$ (cas déjà vu plus haut)

Pour m = φ, $K = \sqrt{4\left(\varphi^2 + \frac{1}{4} - \varphi\right) - 1} = \sqrt{4.\left(1 + \frac{1}{4}\right) - 1} = \sqrt{5 - 1} = 2$ (double-carré des page 8-S)

Pour m = φ², $K = \sqrt{4.\left((1+\varphi)^2 + \frac{1}{4} - \varphi^2\right) - 1}$

$\Rightarrow K = \sqrt{4.\left(1 + 2.\varphi + \frac{1}{4}\right) - 1} = \sqrt{5 - 1 + 8\varphi} = 2.\sqrt{1 + 2\varphi} = 2\sqrt{\varphi + \varphi^2} = 4{,}1$ (inconnu, très allongé)

- <u>Le problème devrait-il être entièrement revu ?</u>

— On constate que, selon l'approche incluant le point O, l'optimum était $K = \sqrt{3}$ (avec en outsider : $K = \sqrt{8}$), tandis qu'en se limitant aux points d'intersection, l'optimum est $K = \sqrt{8}$ (avec en outsider : $K = 2$).

La situation est insuffisamment claire pour pouvoir affirmer d'emblée que K = 2 n'est pas optimal : une troisième approche pourrait en effet le faire passer d'outsider à optimum, sur le modèle de ce qui est arrivé à $K = \sqrt{8}$

Faisons toutefois remarquer que les pages 8-9 (élisant K = 2 avec m = φ) se référeraient à une égalité de ratio en excluant le point O, démarche qui, incontestablement, aboutit à l'optimum $K = \sqrt{8}$ quand elle est pratiquée de manière exhaustive. Il reste malgré tout à vérifier qu'une approche indépendante et très simple n'aboutit pas à retrouver φ.

Le fait de s'intéresser au cercle inscrit (dans un rectangle) par le biais de ses points d'intersection avec la diagonale n'avait rien d'évident. Sur le modèle du pentagone (page 13) ou des polygones en général, on serait plutôt tenté d'aborder le cercle inscrit dans un groupe de 3 mesures :
- rayon du cercle inscrit : R
- rayon du cercle circonscrit : R'
- distance (orthogonale) maximale entre le centre et un côté : R"

Pour un polygone régulier, R et R" sont confondus, mais avec un rectangle, ils sont distincts (cf figure II.6.B) :

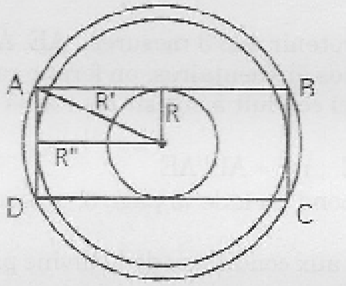


Figure II.6.B

On a donc la relation R' > R" > R. Et cela fournit il une voie d'optimisation : on peut chercher le cas donnant R'/R" = R"/R. On pourrait aussi bien dire R"/R' = R/R" ; il s'agit du même cas, mais comme on aurait des ratios inférieurs à 1, cela exclurait toute éventualité de retomber sur le miraculeux nombre d'or (φ = 1,62).

— Dans le détail : $\frac{R'}{R} = \frac{\frac{AB}{2}}{\frac{AD}{2}} = \frac{AB}{AD} = K$

et $\frac{R'}{R''} = \frac{\frac{AC}{2}}{\frac{AB}{2}} = \frac{AC}{AB} = \sqrt{\frac{AB^2 + AD^2}{AB^2}} = \sqrt{1 + \frac{AD^2}{AB^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{K^2}}$

Donc : $\frac{R'}{R''} = \frac{R''}{R} \Rightarrow K^2 = 1 + \frac{1}{K^2} \Rightarrow K^4 - K^2 - 1 = 0 \Rightarrow K^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi \Rightarrow K = \sqrt{\varphi}$

Le résultat n'est pas celui attendu (K = 2 et m = φ), mais il est satisfaisant de retrouver un élément connu, reliable au nombre d'or. Ce rectangle, scindé par une diagonale, donnerait en effet le triangle d'or et son inverse — voir page 27 ; il était aussi mentionné, page 7, sous le nom CMBB'.

Quoi qu'il en soit, on a là un troisième prétendant de plein droit au titre de rectangle optimal relativement au cercle inscrit.

L'équation qui le définit n'introduit cependant pas à proprement parler le nombre d'or, mais un de ses dérivés.

Comme le triangle d'or (au niveau de ce qui était noté BC/BM page 27), il contient simplement un ratio annexe parfaitement égal à φ : AC/AB. En termes relatifs au cercle inscrit, on utiliserait les moitiés de numérateur et dénominateur, soit AC/AB = AO/OE = φ (cf figure II.6.A).

• <u>Dernier essai d'optimisation</u>

— Si la dernière approche a eu le mérite d'introduire l'éloignement des côtés (et pas seulement des coins), les approches précédentes avaient cependant un indice intéressant : la distance entre le rectangle et le cercle lui-même (plutôt que son centre).

Sur la figure II.6.C, les deux démarches sont prises en compte : on définit le point F et le point E. La notion de distance au centre peut donc s'exprimer par AE ou par FG, et ceci est beaucoup plus simple que la distance AE' sur la figure II.6.A, qui n'avait aucune justification intuitive.

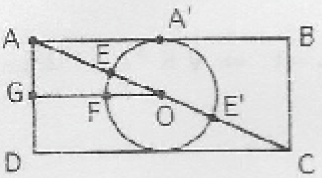


Figure II.6.C

Le problème est que l'on a 2 indices AE et FG, et que cela ne suffit pas à une optimisation classique (puisque AE > FG, on ne peut pas prendre par défaut la solution AE = FG). Il faut donc définir un troisième indice, et à ce niveau 3 possibilités sont envisageables :
- normaliser AE et FG en les divisant par le rayon (R = AG), puis chercher le cas AE/AG = AG/FG
- procéder de même avec le diamètre (2.R = AD)
- définir la troisième distance entre cercle et rectangle : AA' = 0, puis égaliser les différences : AE - FG = FG - AA' (cette égalité ne fournit pas directement un facteur de proportion indépendant de l'échelle, mais on pourra toujours en tirer l'indice K = AB/AD, pour savoir quelle forme de carré a été définie).

— Dans le cadre de la première option, on peut écrire :

$$\frac{AE}{AG} = \frac{AC - OE}{AG} = \frac{\frac{AC}{2} - \frac{AD}{2}}{\frac{AD}{2}} = \frac{AC}{AD} - 1 = \sqrt{\frac{AB^2 + AD^2}{AD^2}} - 1 = \sqrt{K^2 + 1} - 1$$

$$\frac{AG}{FG} = \frac{AG}{OG - OF} = \frac{\frac{AD}{2}}{\frac{AB}{2} - \frac{AD}{2}} = \frac{1}{\frac{AB}{AD} - 1} = \frac{1}{K - 1}$$

Donc : $\frac{AE}{AG} = \frac{AG}{FG} \Rightarrow \sqrt{K^2 + 1} - 1 = \frac{1}{K - 1} \Rightarrow (K - 1).\sqrt{K^2 + 1} - (K - 1) = 1$

$\Rightarrow (K - 1)^2.(K^2 + 1) = (1 + K - 1)^2 \Rightarrow K^4 - 2.K^3 + K^2 - 2.K + 1 = 0$

A défaut de trouver la solution algébrique, on trouve par essai itératif : K = 0,53 < 1 (impossible) ou K = 1,8832, ce qui ne donne pas le double carré attendu (K = 2), ni un des rectangles vus jusqu'ici.

Si l'on évite de passer par K, on n'est pas moins conduit à une équation non soluble simplement par l'algèbre :

$$\frac{AE}{AG} = \frac{AG}{FG} \Rightarrow AE.FG = AG^2 \Rightarrow \left(\frac{AC - AD}{2}\right).\left(\frac{AB - AD}{2}\right) = \frac{AD^2}{4}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AC - AD}{2}\right).\left(\frac{AB - AD}{2}\right) = \frac{AD^2}{4} \Rightarrow AC.AB - AC.AD - AB.AD = 0 \Rightarrow AC = \frac{AB.AD}{AB - AD}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{AB.AD}{AB - AD} \Rightarrow AB^2 + AD^2 = \frac{AB^2.AD^2}{AB^2 + AD^2 - 2.AB.AD} \Rightarrow AB^2 + AD^2 = \frac{AB^2.AD^2}{AB^2 + AD^2 - 2.AB.AD}$$

— La seconde option est voisine :

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AE}{2.AG} = \frac{\sqrt{K^2 + 1} - 1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{AD}{FG} = \frac{2.AG}{FG} = \frac{2}{K - 1}$$

Donc : $\frac{AE}{AG} = \frac{AG}{FG} \Rightarrow \frac{\sqrt{K^2 + 1} - 1}{2} = \frac{2}{K - 1} \Rightarrow (K - 1).\sqrt{K^2 + 1} - (K - 1) = 4$

$$\Rightarrow (K-1)^2 (K^2+1) = (4+K-1)^2 \rightarrow K^4 - 2K^3 + K^2 - 8K - 8 = 0$$

Et on trouve par essai itératif : K = - 0,77 < 1 (impossible) ou K = 2.9184, ce qui ne donne toujours ni le double carré attendu (K = 2), ni un des rectangles vus jusqu'ici.

— Avec la troisième option, on change totalement de formule. Le point de départ peut être le suivant :

$$\frac{AE - FF'}{FF' - AA'} = \frac{\dfrac{AC - AD}{2} - \dfrac{AB - AD}{2}}{\dfrac{AB - AD}{2} - 0} = \frac{AC - AB}{AB - AD} = \frac{\dfrac{AC}{AD} - K}{K - 1} = \frac{\sqrt{\dfrac{AB^2 + AD^2}{AD^2}} - K}{K - 1} = \frac{\sqrt{K^2 + 1} - K}{K - 1}$$

D'où : $AE - FF' = FF' - A'A' \Rightarrow \dfrac{\sqrt{K^2+1} - K}{K-1} = 1 \rightarrow \sqrt{K^2+1} = 2K - 1 \Rightarrow K^2 + 1 = 4K^2 - 4K + 1$

$$\Rightarrow 3K^2 - 4K = 0 \Rightarrow 3K - 4 = 0 \Rightarrow K = \frac{4}{3}$$

Le fait d'avoir pour seule propriété un ratio donné égal à 1 paraît un peu léger, pour considérer ce rectangle comme optimal. Toutefois, en l'étudiant plus complètement, on note une autre propriété intéressante.

On avait :

$K = \sqrt{4\left(m - \dfrac{1}{2}\right)^2 - 1}$; ceci implique $K^2 + 1 = 4\left(m^2 + \dfrac{1}{4} - m\right) \Rightarrow m^2 - m - \dfrac{K^2}{4} = 0$

Et donc : $m\,(> 1) = \dfrac{1 + \sqrt{1 + K^2}}{2}$; avec K = 4/3, cela donne $m = \dfrac{1 + \sqrt{1 + \dfrac{16}{9}}}{2} = \dfrac{1 + \dfrac{5}{3}}{2} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$

Ce rectangle présente donc la particularité K = m. Ceci signifie que la proportion majeure (au sens défini page 7) du rectangle ABCD est égale à la proportion relative (au sens défini page 2) du segment E'EA. Il y a là une singularité importante, qui n'avait pas été recherchée spontanément, parce qu'on essayait de se concentrer sur 2 proportions liées au cercle.

Le facteur K = 4/3 est en tout cas, incontestablement, l'optimum tirable de la figure II 6.C.

• Synthèse

Quatre grandes familles d'optimisation ont été abordées, pour les rapports entre les rectangles et leur cercle inscrit.

La plus intuitive, la plus claire, est assurément celle fondée sur les cercles concentriques (donnant $K = \sqrt{\varphi}$). Vient ensuite celle fondée sur les distances au cercle (donnant K = 4/3). Puis les situations ayant donné $\sqrt{3}$ et $\sqrt{8}$, fondée sur des égalités dimensionnelles simples. En dernier lieu interviennent les optimisations étrangement basée sur la distance AE' — or c'était là qu'on débouchait directement sur le nombre d'or, comme valeur des ratios choisis égaux.

• Conclusion

Si l'on aborde les rectangles par la relation qu'ils ont vis à vis de leur cercle inscrit (plutôt que par les dimensions de leur côtés ou diagonales), il n'en reste pas moins que le rectangle conduisant droit au nombre d'or ne fait pas partie des solutions les plus simples, les plus élégantes.

La solution optimale aboutit bien à la racine de φ, mais ceci n'explique pas que l'on appelle "nombre d'or" le carré de la valeur obtenue plutôt que le résultat brut.

La définition de φ n'est donc pas justifiée par l'optimisation d'inscription circulaire dans les rectangles.

7. le périmètre d'or

Au niveau des périmètres relatifs de triangle, le nombre d'or avait émergé comme optimum après un certain nombre de choix arbitraires, présentés comme exemples simples de solution. Il est nécessaire de remettre un peu d'ordre dans tout cela.

• Généralisation de l'optimisation

Sur la figure II.7.A ci-dessous, on cherche à fixer le point C à une ordonnée supérieure à celles de A et B. Rappelons que moins la différence d'ordonnée sera grande, plus petit sera le périmètre du triangle ABC, et il conviendra donc de décider comment choisir hC, pour que la figure reste un triangle digne de ce nom.

Par contre, on peut dès le début se poser des questions sur l'abscisse du point C ; on ne choisira évidemment pas d'être infiniment à gauche de A, ou infiniment à droite de B (la figure ne ressemblerait plus à un triangle). Par contre, les positions situées pile au-dessus du segment AB (en entier) sont candidates à l'obtention d'un périmètre minimal — c'est-à-dire d'un point optimal, extrême, dans la fonction reliant périmètre du triangle et absisse de C, à une hauteur hC donnée.

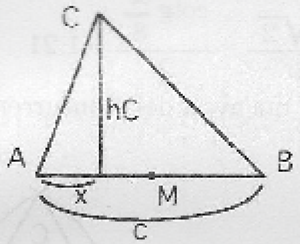


Figure II.7.A

En appelant p le demi-périmètre et en posant x = k.c (cf page 11), on obtient :

$$\frac{p}{c} = \frac{\sqrt{(c - k.c)^2 + hC^2} + \sqrt{(k.c)^2 + hC^2} + c}{2.c} = \frac{\sqrt{k^2 - 2.k + 1 + hC^2} + \sqrt{k^2 + hC^2} + 1}{2}$$

L'optimum x' = k'.c s'obtient en annulant la dérivée de la fonction ci-dessus, puisqu'il s'agit d'un extremum :

$$\frac{d\,\frac{p}{c}}{d\,k}(k') = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2.k' - 2}{2.\sqrt{k'^2 - 2.k' + 1 + hC^2}} + \frac{2.k'}{2.\sqrt{k'^2 + hC^2}} + 0\right) = 0$$

$$\Rightarrow (k' - 1).\sqrt{k'^2 + hC^2} + k'.\sqrt{k'^2 - 2.k' + 1 + hC^2} = 0 \Rightarrow (k'^2 + 1 - 2.k').(k'^2 + hC^2) = (-k')^2.(k'^2 - 2.k' + 1 + hC^2)$$

$$\Rightarrow hC^2.k'^2 + hC^2 - 2.hC^2.k' + k'^4 + k'^2 - 2.k'^3 = k'^4 - 2.k'^3 + k'^2 + hC^2.k'^2$$

$$\Rightarrow hC^2 - 2.hC^2.k' = 0 \;\Rightarrow\; 1 - 2.k' = 0 \;\Rightarrow\; k' = 1/2$$

Il en découle que quel que soit la hauteur hC retenu, le périmètre optimal (minimal) sera obtenu en plaçant le point C à l'aplomb du point M (milieu de AB). Autrement-dit : le triangle optimal est un triangle isocèle.

• Choix de la hauteur

— A ce stade, il s'agit de tracer le plus simplement possible un triangle isocèle.
Quel que soit hC, on aura :

$$\frac{p}{c} = \frac{\dfrac{AB + \sqrt{AM^2 + MC^2} + \sqrt{BM^2 + MC^2}}{2}}{AB} = \frac{1 + \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{hC}{AB}\right)^2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{hC}{AB}\right)^2}}{2} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\left(\frac{hC}{AB}\right)^2}}{2}$$

Le choix de hC ne visera pas à obtenir une valeur particulière de ce ratio, puisque les valeurs minimale (= 1) et maximale (∞) sont pareillement incorrectes (cf page 10).

— Le chapitre I.6 suggérait la démarche suivante (cf figure II.7.B) : déterminer le milieu M (et l'orthogonale en ce point) puis tracer en prenant M pour centre, un cercle de rayon AB.

Puisque l'on a ainsi $\frac{hC}{AB} = 1$, on obtient : $\frac{p}{c} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi = 2.\cos\frac{\pi}{5} = 1{,}62$

(Les 2 triangles ACM et BCM sont en fait des demi-"double-carrés" : leur rapport grand côté/ petit côté orthogonaux vaut $K = \sqrt{2}$)

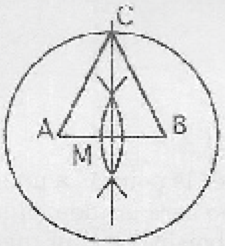


Figure II.7.B

— Le report de la dimension AB en M est cependant, en pratique, moins simple que l'opération ci-dessous (figure II.7.C), qui évite de déplacer l'axe du compas pour le dernier cercle : après avoir déterminé M, on trace directement un cercle de centre M et de rayon BM (contrairement au cas précédent où l'on pointait en A pour régler le rayon, puis en M pour tracer).

Puisque l'on a ainsi $\frac{hC}{AB} = \frac{1}{2}$, on obtient : $\frac{p}{c} = \frac{1+\sqrt{2}}{2} = \frac{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8}}{2} = 1{,}21$

On note avec intérêt le retour vainqueur de la cotg π/8, qui avait déjà concurrencé le nombre d'or page 20 (médiocrement) et page 23 (victorieusement).

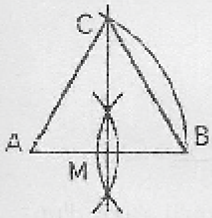


Figure II.7.C

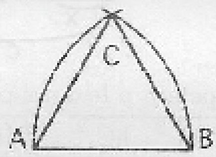


Figure II.7.D

— Le souhait d'associer autant que possible les réglages de rayon et les tracés de cercle n'était qu'à moitié réalisé, sur la figure II.7.C. En effet la détermination du milieu se faisait en traçant un arc quelconque partant de A, puis en reportant le même rayon, centré sur B. On peut éviter cela, en déterminant le milieu au moyen de cercles de rayon AB (figure II.7.D). Comme cette démarche conduit à un point de croisement à une hauteur parfaitement déterminé (ABC est équilatéral), on peut même se dispenser de rechercher M et d'en extrapoler un point au dessus.

Par cette méthode, le point C est déterminé en 2 cercles, au lieu de 3 cercles et 1 trait pour les approches précédentes. On a donc clairement là l'optimum en matière de simplicité.
enreport de la dimension AB en M est cependant, en pratique, moins simple que l'opération ci-dessous (figure II.7.C), qui évite un déplacement à l'axe du compas : après avoir déterminé M, on trace un cercle de centre M et de rayon BM (le réglage du rayon et le tracé du cercle se font donc dans la foulée, contrairement au cas précédent).

Puisque l'on a $\frac{hC}{AB} = \frac{\operatorname{tg} 60°}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on obtient : $\frac{p}{c} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

• <u>Conclusion</u>

Si l'on aborde les triangles par la valeur relative de leur périmètre, plutôt que par la valeur de leurs angles ou côtés, il n'en reste pas moins qu'un triangle reliable au nombre d'or n'apparaît qu'en troisième position, dans l'échelle de simplicité maximale.

Quant à l'optimisation par annulation de la dérivée, elle conduit simplement à élire la famille des triangles isocèles, ce qui n'a en soi rien à voir avec le nombre d'or.

<u>La définition de φ n'est donc pas justifiée par l'optimisation de périmètre des triangles ni par l'analyse fonctionnelle.</u>

8. l'angle d'or

On aborde maintenant les domaines où l'étude initiale se contentait d'affirmer qu'ils incluaient φ (et non plus qu'ils avaient pour optimum un élément d'indice égal à φ). Il y a donc beaucoup moins à dire.

En ce qui concerne les angles, on a :

— Par ordre de simplicité algébrique : tg 45°et sec 60°, puis cotg 22,5° et 15°, puis cos 36° et sin 18°. Soit : 1 et 2, puis $(\sqrt{2}+1)$ et $(\sqrt{3}+2)$, puis $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ et $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

Le nombre d'or serait donc cinquième, ex aequo. Tandis que le fameux cotg π/8 (22,5°) — aperçu plusieurs fois comme concurrent sérieux au titre de nombre d'or — serait troisième.

— Par ordre de "pouvoir générateur" ou d'utilité pratique : cos 45°, cos 60°, cos 36° = φ/2
Le nombre d'or serait donc troisième.

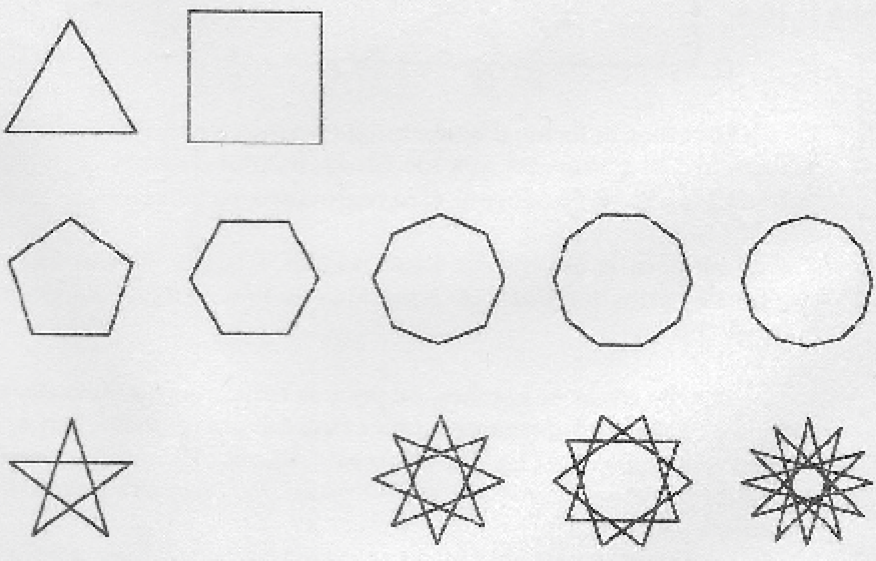
Il n'y a rien à ajouter. Le terme φ est là, incontestablement, si l'on pousse au delà des 2 étapes scolaires classiques (45° et 60°/30°). Mais cela ne confère pas de charisme particulier à ce nombre.

9. le polygone d'or

Le nombre φ n'apparait clairement que dans le décagone étoilé, c'est-à-dire dans un polygone régulier de troisième ordre (cf figure II.9.A), après le triangle équilatéral et le carré, les formes convexes de pentangone, hexagone, octogone, décagone et dodécagone, puis enfin les formes étoilées de pentagone et octogone.

En ce sens, φ émerge en dizième place, sur 11 rangs. Ce n'est pas impressionnant.

Figure II.9.A



On trouve, certes, φ/2 dans le pentagone convexe (en position n°3), 1/φ dans le décagone convexe (en position n°6), et 1/2φ dans le pentagone étoilé (en position n°8). Mais ceci ne justifierait pas d'élire la forme φ.

10. le polyèdre d'or

Le nombre φ n'apparait que dans le dodécaèdre, c'est-à-dire le quatrième des 5 polyèdres réguliers convexes (après le tétraèdre, l'hexaèdre et l'octaèdre), et de manière pour le moins anecdotique, via une des ligne trigonométrique de la moitié de l'angle de dièdre.

Par contre, l'étude des volumes cubiques (au sens large) a été l'occasion de réflexions sur les faces rectangulaires, et a fourni des éléments supplémentares sur les rectangles — éléments qui se sont avérés troublants et assortis de conséquences pratiques (en architecture).

• Origine et propriétés du recangle φ^2

— Ce rectangle est apparu, comme par magie, en cherchant la troisième face d'un cube où 2 faces adjacentes sont des rectangles d'or (cf page 16).

Par ailleurs, le fait qu'il présente à la fois des ratios égaux à φ et φ^2 est apparu miraculeux.

En fait, ce rectangle aurait dû émerger dès l'étude des rectangles simples (cf page 29), si celle-ci avait été effectuée de manière complète.

De même, le fait que les ratios φ et φ^2 aillent de pair aurait dû être connu dès l'étude de la divine proportion (cf page 19).

— Toutefois, il y a tout de même un élément nouveau, page 16, c'est la définition des médianes AE et AF (cf figure II.10.A).

La propriété signalée page 16 était : $K = AB/AD = \varphi^2 \Rightarrow AE/AF = \varphi$

Alors que la propriété mentionnée page 19 était : $K = AB/AD = \varphi^2 \Rightarrow AB/A'B = \varphi$

Il convient donc d'étudier de plus près les médianes : optimiser un rectangle en fonction des proportions de ses médianes débouche-t-il sur le nombre d'or ?

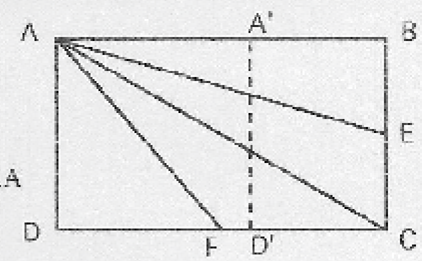


Figure II.10.A

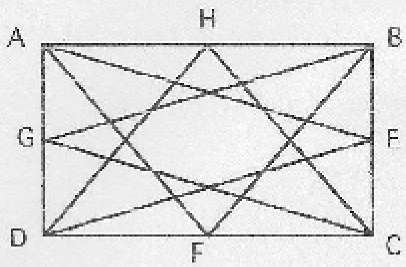


Figure II.10.B

— Optimiser la forme d'un rectangle revient à définir son rapport grand côté/petit côté : AB/AD ou AD/AB. Si l'on s'intéresse aux médianes, il suffit d'ajouter 2 indices : AE et EF. En-effet, les 8 médianes (cf figure II.10.B) peuvent être regroupées en 2 longueurs : AE = BG = CG = DE et AF = BF = CH = DH.

Toutefois, le fait d'avoir 4 indices (AB, AD, AE, AF) au lieu de 3 habituellement pour les optimisations de ratios conduit à 39 équations au lieu de 9 (cf raisonnement pour 5 indices et 100 équations en page 30).

Pour diminuer ce nombre, on peut se contenter de considérer les rectangles "couchés" (avec K = AB/AD > 1), sans s'intéresser à leurs équivalents de même forme en position "debout" (avec K < 1). Cela revient à poser AB > AD, et on sait déjà par Pythagore que AE > AB et AF > AD. On peut alors se contenter de considérer les ratios > 1, sans s'intéresser à leurs inverses qui vont donner des équations symmétriques.

Il convient ensuite d'éliminer plusieurs égalités impossibles :

AE > (AB et AF) > AD implique que AE/AD est supérieur à tout autre ratio envisageable.

On aura aussi, d'après les numérateurs : AE/AB > AF/AB et AE/AF > AB/AF.

et d'après les dénominateurs : AB/AD > AB/AF et AF/AD > AF/AB

Ceci ramène à 11 le nombre d'équations :

(1) AE/AF = AE/AB ⇔ AB = AF
(2) AE/AF = AF/AB ⇔ AF.AF = AB.AE
(3) AE/AF = AF/AD ⇔ AF.AF = AD.AE
(4) AE/AF = AB/AD ⇔ AE.AD = AB.AF
(5) AB/AD = AE/AB ⇔ AB.AB = AD.AE
(6) AB/AD = AF/AD ⇔ AB = AF ⇔ (1)
(7) AB/AD = AF/AB ⇔ AB.AB = AF.AD
(8) AE/AB = AB/AF ⇔ AB.AB = AE.AF
(9) AE/AB = AF/AD ⇔ AB/AD = AE/AF ⇔ (4)
(10) AF/AD = AB/AF ⇔ AF.AF = AB.AD
(11) AB/AF = AF/AB ⇔ AB = AF ⇔ (1)

Pour réscudre ces équations, il est utile d'exprimer chaque longueur en fraction de AD :

$$AE = \sqrt{AB^2 + \frac{AD^2}{4}} = AD.\sqrt{K^2 + \frac{1}{4}}$$

$$AF = \sqrt{AD^2 + \frac{AB^2}{4}} = AD.\sqrt{\frac{K^2}{4} + 1}$$

$$AB = K.AD = AD.\sqrt{K^2}$$

D'où :

(1),(6),(11) $AB = AF \Rightarrow K^2 = \frac{K^2}{4} + 1 \Rightarrow \frac{3}{4}K^2 = 1 \Rightarrow K = \frac{2}{\sqrt{3}} = AB/AD = AF/AD$

$$\Rightarrow AE/AF = AE/AB = \frac{\sqrt{K^2 + \frac{1}{4}}}{K} = \sqrt{1 + \frac{1}{4.K^2}} = \sqrt{1 + \frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{19}}{4} \text{ et } AB/AF = AF/AB = 1$$

(2) $AF^2 = AB.AE \Rightarrow \left(\frac{K^2}{4} + 1\right)^2 = K^2\left(K^2 + \frac{1}{4}\right) \Rightarrow \frac{K^4}{16} + 1 + \frac{K^2}{2} = K^4 + \frac{K^2}{4}$

$$\Rightarrow 15.K^4 - 4.K^2 - 16 = 0 \Rightarrow K = \sqrt{\frac{4 + \sqrt{976}}{30}} = \sqrt{\frac{2}{15}.\left(1 + \sqrt{61}\right)}$$

$$\Rightarrow AE/AF = AF/AB = \frac{\sqrt{\frac{K^2}{4} + 1}}{K} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{K^2}} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{15}{2 + 2.\sqrt{61}}}$$

$$\Rightarrow AE/AF = AF/AB = \sqrt{\frac{\left(1 + \sqrt{61} + 30\right).\left(4\sqrt{61} - 4\right)}{\left(4 + 4.\sqrt{61}\right).\left(4.\sqrt{61} - 4\right)}} = \sqrt{\frac{30.\sqrt{61} + 30}{240}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{61}}{8}}$$

(3) $AF^2 = AD.AE \Rightarrow \left(\frac{K^2}{4} + 1\right)^2 = K^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{K^4}{16} + 1 + \frac{K^2}{2} = K^2 + \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow K^4 - 8.K^2 + 12 = 0 \Rightarrow K = \sqrt{\frac{8 \pm \sqrt{16}}{2}} = \sqrt{2} \text{ ou } \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow AE/AF = AF/AD = \sqrt{\frac{K^2}{4} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ ou } \sqrt{\frac{5}{2}}$$

(4),(9) $AB.AF = AD.AE \Rightarrow K^2.\left(\frac{K^2}{4} + 1\right)^2 = K^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{K^4}{4} + K^2 = K^2 + \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow K^4 = 1 \Rightarrow K = 1 \text{ (carré, donc exclu)}$$

(5) $AB^2 = AD.AE \Rightarrow K^4 = K^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow 4.K^4 - 4.K^2 - 1 = 0 \Rightarrow K = \sqrt{\frac{4 + \sqrt{32}}{8}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}}$

$$\Rightarrow K = AB/AD = AE/AB = \sqrt{\frac{\text{cotg } \pi/8}{2}}$$

(7) $AB^2 = AD.AF \Rightarrow K^4 = \frac{K^2}{4} + 1 \Rightarrow 4.K^4 - K^2 - 4 = 0 \Rightarrow K = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{65}}{8}} = AB/AD = AF/AB$

(8) $AB^2 = AD.AE \Rightarrow K^4 = \left(K^2 - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{K^2}{4} + 1\right) \Rightarrow -K^4 + \frac{K^4}{4} - \frac{K^2}{16} + K^2 - 16 = 0$

$\Rightarrow 12.K^4 - 17.K^2 + 4 = 0 \Rightarrow K = \sqrt{\frac{17 + \sqrt{481}}{24}}$

(10) $AF^2 = AD.AB \Rightarrow \left(\frac{K^2}{4} + 1\right)^2 = K^2 \Rightarrow \frac{K^4}{16} + 1 + \frac{K^2}{2} = K^2$

$\Rightarrow K^4 - 8.K^2 + 16 = 0 \Rightarrow K = \sqrt{\frac{8}{2}} = 2$

$\Rightarrow AB/AF = AF/AD = \sqrt{\frac{K^2}{4} + 1} = \sqrt{2}$

— Aucune des 8 solutions ne fait donc apparaître le nombre d'or. On note que réapparait le double-carré (K = 2), la cotg π/8 (moins directement mais pour la cinquième fois, après les pages 20-23-36-37), et des solutions aussi simples que les racines de 2 et 6.

Mais la solution optimale est assurément $K = 2/\sqrt{3}$, pour laquelle on a AB = AF, ce qui donne AB/AF = AF/AB, mais aussi AB/AE = AF/AE et AB/AD = AF/AD.

Si on avait pris en considération la distance AC (= $AD.\sqrt{K^2 + 1}$), en plus, on n'aurait pas plus trouvé le nombre d'or — sauf via la combinaison AB/AD = AC/AB, correspondant au double triangle d'or mais indépendante des médianes AE et AF. Par contre on aurait noté 2 propriétés intéressantes :

AB/AD = AC/AF $\Rightarrow K = \sqrt{2}$ (ce qui revalorise cette solution, vue plus haut)

AC/AF = AF/AD $\Rightarrow K = \sqrt{8}$ (ce qui réintroduit un rectangle déjà vu au niveau des cercles inscrits)

L'optimisation des formes de rectangle prenant pour base les médianes confirme donc les éléments de conclusion obtenus par d'autres voies : il y a beaucoup plus simples que les rectangles liés au nombre d'or.

• Le rectangle Parthénon est-il extraordinaire ?

Pour mesurer la crédibilité de la merveilleuse coïncidence entre l'approximation esthétique 13/6 et un rectangle issu du nombre d'or, il convient de vérifier que la panoplie des rectangles liés à φ ne couvre pas la totalité des valeurs de K rencontrables.

— Rappelons que le rectangle Parthénon se définit par AC/AF = φ, ce qui implique que l'on s'intéresse à la diagonale et aux médianes, en plus des côtés définissant la forme. On a donc 5 indices à disposition : AB, AD, AC, AE, AF.

On note que si AB est le grand côté : AC > AE > (AB et AF) > AD

Les ratios > 1, susceptibles d'être égaux à φ, sont donc au nombre de 11 : AC/AE, AC/AB, AC/AF, AC/AD, AE/AB, AE/AF, AE/AD, AB/AD, AF/AD, AB/AF, AF/AB

Chacune des 11 équations sera examinée à travers 2 indicateurs de forme (pour les rectangles "couchés") : le rapport de proportion K (= AB/AD >1), et l'angle de la diagonale par rapport à la verticale : α (= arctg K > 45°).

(1) AC/AE = φ

$\Rightarrow \frac{AC^2}{AB^2} = \varphi^2 \Rightarrow \frac{AB^2 + AD^2}{AB^2} = 1 + \varphi \Rightarrow 1 + \frac{AD^2}{AB^2} = 1 + \varphi \Rightarrow \frac{AD^2}{AB^2} = \varphi > 1 \Rightarrow AD > AB$ (exclu)

(2) AB/AD = φ → rectangle d'or ⇒ K = φ = 1,618 ⇒ α = 58,28°

(3) $AE/AB = \varphi \Rightarrow \frac{AE^2}{AB^2} = \varphi^2 \Rightarrow \frac{AB^2 + \frac{AD^2}{4}}{AB^2} = 1 + \varphi \Rightarrow \frac{1}{4.K^2} = \varphi \Rightarrow K = \frac{1}{2.\sqrt{\varphi}} = 0{,}39 < 1$ (exclu)

(4) $AB/AF = \varphi \Rightarrow \frac{AB^2}{AF^2} = \varphi^2 \Rightarrow \frac{AB^2}{\frac{AB^2}{4} + AD^2} = 1 + \varphi \Rightarrow AB^2.\left(1 + \frac{1-\varphi}{4}\right) = AD^2.(1 + \varphi)$

$$\Rightarrow K = 2 . \sqrt{\frac{1+\varphi}{3-\varphi}} = 2{,}753 \Rightarrow \alpha = 70{,}04°$$

(5) AF/AB = φ

$$\Rightarrow \frac{AF^2}{AB^2} = \varphi^2 \Rightarrow \frac{\frac{AB^2}{4} + AD^2}{AB^2} = 1 + \varphi \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{K^2} = 1 + \varphi \Rightarrow K = \sqrt{\frac{1}{\frac{3}{4} + \varphi}} = 0{,}65 < 1 \text{ (exclu)}$$

(6) AC/AD = φ ⇒ rectangle issu du triangle de Cheops ⇒ $K = \sqrt{\varphi} = 1{,}272 \Rightarrow \alpha = 51{,}83°$

(7) AC/AE = φ ⇒ $\frac{AC^2}{AE^2} = \varphi^2 \Rightarrow \frac{AB^2 + AD^2}{AB^2 + \frac{AD^2}{4}} = 1 + \varphi \Rightarrow AD^2 = \varphi.AB^2 - (1+\varphi).\frac{AD^2}{4}$

$$\Rightarrow \frac{AB^2}{AD^2} = K^2 = \frac{3-\varphi}{4\,\varphi} = 0{,}21 < 1 \text{ (exclu)}$$

(8) AC/AF = φ ⇒ rectangle Parthénon ⇒ $K = 2{,}164 \Rightarrow \alpha = 65{,}20°$

(9) AE/AD = φ

$$\Rightarrow \frac{AE^2}{AD^2} = \varphi^2 \Rightarrow \frac{AB^2 + \frac{AD^2}{4}}{AD^2} = 1 + \varphi \Rightarrow K^2 + \frac{1}{4} = 1 + \varphi \Rightarrow K = \sqrt{\varphi + \frac{3}{4}} = 1{,}539 \Rightarrow \alpha = 56{,}98°$$

(10) AF/AD = φ

$$\Rightarrow \frac{AF^2}{AD^2} = \varphi^2 \Rightarrow \frac{\frac{AB^2}{4} + AD^2}{AD^2} = 1 + \varphi \Rightarrow \frac{K^2}{4} + 1 = 1 + \varphi \Rightarrow K = 2 . \sqrt{\varphi} = 2{,}544 \Rightarrow \alpha = 68{,}51°$$

(11) AE/AF = φ ⇒ $\frac{AE^2}{AF^2} = \varphi^2 \Rightarrow \frac{AB^2 + \frac{AD^2}{4}}{\frac{AB^2}{4} + AD^2} = 1 + \varphi \Rightarrow AB^2 . \frac{3-\varphi}{4} = AD^2 . \frac{3+4.\varphi}{4}$

$$\Rightarrow K = \sqrt{\frac{3+4.\varphi}{3-\varphi}} = 2{,}618 \Rightarrow \alpha = 69{,}09°$$

— <u>Bref</u>, on trouve 7 rectangles qui donnent satisfaction et sont donc définis par un ratio = φ. Cette famille, allant de rectangles compacts à rectangles longs, n'a rien d'extraordinaire, et ne justifie pas de s'émerveiller devant chaque constituant. Le tir groupé à 68,5°/69°/70° fait d'ailleurs que 3 des 7 sont pratiquement identiques, à l'œil nu.

Pire : le rectangle Parthénon est le moins intéressant de toute la famille. En effet, en développant les formules avec φ et la trigonométrie des angles π/5, on note des coïncidences intéressantes sur cetains rectangles, en dehors de la relation à φ qui les a définis :

$K = 1{,}27 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ (Cheops) → $K = \sqrt{\varphi}$ et α = arcos φ

$K = 1{,}54 = \frac{\sqrt{5+2.\sqrt{5}}}{2}$ → $K = \frac{\mathrm{tg}\,\frac{2\pi}{5}}{2}$

$K = 1{,}62 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (Or) → $K = 2.\cos\frac{\pi}{5}$

$K = 2{,}16 = \sqrt{\frac{10+6.\sqrt{5}}{5}}$ (Parthénon) (rien à signaler)

$K = 2{,}54 = \sqrt{2+2.\sqrt{5}}$ (double Cheops) → $K = 2.\sqrt{\varphi}$

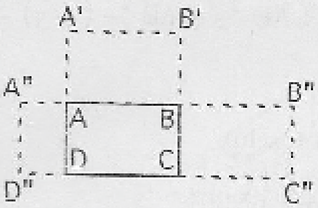
$K = 2{,}62 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ → $K = \varphi^2$

$K = 2{,}75 = \sqrt{\frac{20+8.\sqrt{5}}{5}}$ → $K = 2.\,\mathrm{tg}\,\frac{3\pi}{10}$

— En matière d'angle, cette famille ne comporte pas les $\alpha = 54°$ et $72°$ ($K = 1,38$ et $K = 3,08$) que l'on aurait pu attendre (car ils sont reliables à φ). Dans la grande famille des rectangles où l'on retrouve φ, on peut aussi ajouter le double-carré ($K = 2$) — cf l'inscription d'or.

Mais un restangle où $K = 2\varphi$ serait aussi considéré comme dérive de φ, et ceci conduit à inclure les compositions de rectangles d'or, où de rectanglas associés directement.Que ce soit par une forme de doublement (cf figure II.10.C) ou d'association à un carré (cf figure II.10.D). De chaque cas, on peut alors dériver 5 nouvelles valeurs : 2.K (AB"C"D) sur II.10.C), K + 1/K (A"D"CB sur II.10.C), 1 + 1/K (A'B'CD sur II.10.D), 1 + K (A"D"CB sur II.10.D) et 2/K ou K/2 selon que K est < 2 ou > 2 (A'B'CD sur II.10.D).

Figure II.10.C



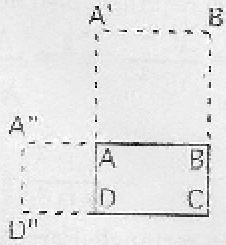


Figure II.10.D

Le bilan des valeurs de K pour les rectangles où l'on retrouve φ, détaillé ci-dessous, prouve qu'il est naturel que l'on trouve approximativement le nombre d'or dans le Parthénon, et dans n'importe quel bâtiment cubique, comme dans les ticket de métro ou autres rectangles quelconques... A peu près tous les cas sont couverts :

	K < 2	K entre 2 et 2,5	K > 2,5
Rectangle d'or	1,62		
Autres, optimisés	1,27	**2**	2,82
Autres, dérivés	1,54	2,16	2,75
Autres, associés	1,376		3,08
Autres, doublés	1,08 1,45 1,24 1,80 1,57 1,81	2,05 2,10 **2,5** 2,19 2,24	2,544 **3** 3,40 5,24 2,68 **4** 5,51 3,12 4,33 6,16 2,94 3,24 5,09
Autres, avec carré	1,32 1,39 1,65 1,36 1,46 1,73 1,382 **1,5** 1,79	2,27 2,38	2,589 3,62 3,16 3,75 3,54 4,08

• <u>Conclusion</u>

Le nombre d'or n'a qu'un intérêt secondaire en trigonométrie, ainsi que dans l'étude des polygones ou polyèdres réguliers.

En ce qui concerne les rectangles impliqués dans les bâtiments cubiques, en ayant des propriétés notables au niveau des médianes, les solutions les plus élégantes n'ont aucun rapport avec le nombre d'or. Et si tel temple harmonieux semble inclure le nombre d'or de manière cachée, c'est qu'une quasi-infinité de rectangles peut être inférée de ce nombre, comme de n'importe quel autre.

<u>La définition de φ n'est donc justifiée : ni par l'optimisation des angles, ni par la géométrie dans l'espace, ni par l'esthétique architecturale.</u>

Bilan

Le nombre d'or n'est qu'une solution, parmi d'autres, dans une équation algébrique concernant les rapports entre puissances successives. Il se trouve que cette équation peut être mise en application dans plusieurs cas géométriques : il suffit de créer des situations où la solution comporte une racine de 5 (diviser un cercle en 5, ajouter par Pythagore le carré de 2 et le carré de 1, etc).

Ce n'est pas divin, ce n'est pas merveilleux, c'est une conséquence directe de l'algèbre et de la trigonométrie. En tant que découverte, pièce par pièce, l'affaire peut être amusante, déconcertante, mais à titre de démonstration linéaire, ce serait aussi morne qu'évident.

Pour ce qui est de l'optimisation de proportions, il faudrait reconnaître que les solutions basées sur le nombre d'or sont de troisième zone : ce ne sont ni les plus simples, ni les plus élégantes.